Le nombre de permutations sans points fixes, ou dérangements, d'un ensemble de n éléments est

$$d_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots \pm \frac{n!}{n!} = n! \times (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!})$$

On en déduit que pour n grand, $d_n \approx \frac{n!}{e}$ d'où $\frac{d_n}{n!} \approx \frac{1}{e}$ ou encore $e \approx \frac{n!}{d_n}$.
La probabilité de n'observer aucun point fixe dans une permutation de n éléments est
$p = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} \approx \frac{1}{e} = 0.36787944\ldots$.

La suite (d_n) des nombres de dérangements peut être définie par l'une ou l'autre des récurrences ci-dessous

1. $d_0 = 1, d_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1,\ d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$
2. $d_0 = 1,$ et pour tout $n \geq 1, d_n = n\, d_{n-1} + (-1)^n)$

Les premiers éléments de la suite (d_n) sont
$1, 0, 1, 2, 9, 44, 265, 1\,854, 14\,833, 133\,496, 1\,334\,961, 14\,684\,570, 176\,214\,841, 2\,290\,792\,932\ldots$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d_n	1	0	1	2	9	44	265	1864	14 833	133 496
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320	362 880
$\frac{d_n}{n!} \approx$	1	0	$0,5$	$0,333$	$0,375$	$0,367$	$0,326$	$0,37$	$0,368$	$0,368$