Suites de Beatty

Multipliez l'un des nombres p ci-dessous par $1, 2, 3, 4, 5\dots$ et ne gardez que les chiffres à gauche de la virgule.
$u(n) = \lfloor np \rfloor$.
Lorsque $p > 1$ et $q = \dfrac{p}{p-1}$, (c.-à-d. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$), les suites de Beatty de p et de q forment une partition de l'ensemble des entiers naturels non nuls, (c'est le cas pour les deux premières suites ci-dessous).

L'une des suites de Wythoff pour le nombre d'or $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887498945$
$1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 37, 38, 40, 42, 43, 45, 46, 48, 50,$
$51, 53, 55, 56, 58, 59, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 71, 72, 74, 76, 77, 79, 80,82, 84, 85, 87, 88, 90, 92, 93, 95, 97$

L'autre pour $p = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 2.6180339887498945$.
$2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 20, 23, 26, 28, 31, 34, 36, 39, 41, 44, 47, 49, 52, 54, 57, 60, 62, 65, 68, 70, 73, 75, 78, 81,$
$83, 86, 89, 91, 94, 96$

La racine carrée de 2, $p = \sqrt{2} = 1.414213562373095\dots$
$1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 45,$
$46, 48, 49, 50, 52, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 82, 83, 84, 86,$
$87, 89, 90, 91, 93, 94, 96, 97\dots$

La base de l'exponentielle népérienne $p = \mathrm{e} = 2.718281828459045\dots$
$2, 5, 8, 10, 13, 16, 19, 21, 24, 27, 29, 32, 35, 38, 40, 43, 46, 48, 51, 54, 57, 59, 62, 65, 67, 70, 73, 76, 78, 81, 84,$
$86, 89, 92, 95$

L'inévitable nombre Pi : $p = \Pi = 3.14159265358979\dots$
$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 91, 94$

Ensembles autogénérateurs

Suite de Kimberling

Définition de la suite de Kimberling : $1 \in S$, si x est un élément de S, alors $2x$ et $4x - 1$ sont éléments de S.
1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 32, 43, 44, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 59, 60, 62, 63, 64, 86, 87, 88, 91, 92, 94, 95, 96, 107, 108, 110, 111, 112, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 128, 171, 172, 174, 175, 176, 182, 183, 184, 187, 188, 190, 191, 192, 214, 215, 216, 219, 220, 222, 223, 224, 235, 236, 238, 239, 240, 246, 247, 248, 251, 252, 254, 255, 256, 342, 343, 344, 347, 348, 350, 351, 352, 363, 364, 366, 367, 368, 374, 375, 376, 379, 380, 382, 383, 384…

Définition d'une autre suite autogénératrice : $1 \in S$, si x est un élément de S, alors $2x + 5$ et $3x + 5$ sont éléments de S.
1, 7, 8, 19, 21, 26, 29, 43, 47, 57, 62, 63, 68, 83, 91, 92, 99, 119, 129, 131, 134, 141, 146, 171, 176, 187, 189, 191, 194, 203, 209, 243, 254, 263, 267, 273, 278, 281, 287, 297, 302, 347, 357, 362, 379, 383, 387, 392, 393, 398, 407, 411, 423, 428, 443, 491, 513, 518, 531, 533, 539, 551, 561, 566, 567, 572, 578, 579, 587, 599, 609, 614, 632, 699, 719, 729, 734, 763, 767, 771, 779, 789, 791, 794, 801, 806, 819, 824, 827, 839, 848, 851, 861, 866, 891, 896, 911, 987, 1031, 1041, 1046, 1067, 1071, 1076, 1083, 1091, 1107, 1127, 1137, 1139, 1142, 1149, 1154, 1161…

Récurrence linéaire

Suites « à la Fibonacci »
Chaque terme est une combinaison linéaire de plusieurs termes précédents. Pour en fabriquer une :

donnez les premiers termes et la formule de récurrence.

Fibonacci
Récurrence $F(0)=0, F(1)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)$
L'équation $r^2-r-1=0$ a deux solutions réelles, le nombre d'or $\phi=\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta=\frac{-}{1}\phi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on en déduit $F(n)=\frac{\phi^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$.
Fonction génératrice $g(x)=xg(x)+x^2g(x)+x$ permet d'obtenir $g(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$.
1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074 ...

Lucas
Récurrence $L(0)=2, L(1)=1, L(n)=L(n-1)+L(n-2)$ (premiers termes différents mais même relation que pour la suite de Fibonacci).
$L(n)=\phi^n+\beta^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
Fonction génératrice $g(x)=\frac{2-x}{1-x-x^2}$.

$2,1,3,4,7,11,18,29,47,76,123,199,322,521,843,1364,2207,3571,5778,9349,15127,24476,39603,$
$64079,103682,167761,271443,439204,710647,1149851,1860498,3010349,4870847,7881196,\ldots$

Perrin $P(n)=\alpha^n+\beta^n+\bar{\beta}^n$ où $\alpha=1.3247\ldots$ est la racine réelle de l'équation $x^3-x-1=0$ et β, $\bar{\beta}$ les deux racines complexes conjuguées (de module inférieur à 1).
Récurrence $P(0)=3, P(1)=0, P(2)=2, P(n)=P(n-2)+P(n-3)$.
Fonction génératrice $g(x)=\frac{3-x^2}{1-x^2-x^3}$.
3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644, 853, 1130, 1497, 1983, 2627, 3480, 4610, 6107, 8090, 10717, 14197, 18807, 24914, 33004, 43721, 57918, 76725, 101639, 134643, 178364, 236282, 313007, 414646, 549289, 727653, 963935, 1276942, 1691588, 2240877 ...,
Padovan
Récurrence $p(0)=1, p(1)=0, p(2)=0, p(n)=p(n-2)+p(n-3)$ (même relation que la précédente)
Fonction génératrice $g(x)=\frac{1-x^2}{1-x^2-x^3}$.
1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 200, 265, 351, 465, 616, 816, 1081, 1432, 1897, 2513, 3329, 4410, 5842, 7739, 10252, 13581, 17991, 23833, 31572, 41824, 55405, 73396, 97229, 128801, 170625, 226030, 299426, 396655 ...

$N(0)=1, N(1)=1, N(2)=1, N(n)=N(n-1)+N(n-3)$
Fonction génératrice $g(x)=\frac{1}{1-x-x^3}$.
1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129, 189, 277, 406, 595, 872, 1278, 1873, 2745, 4023, 5896, 8641, 12664, 18560, 27201, 39865, 58425, 85626, 125491, 183916, 269542, 395033, 578949, 848491, 1243524, 1822473, 2670964, 3914488, 5736961, 8407925, 12322413, 18059374, 26467299, 38789712, 56849086, 83316385, 122106097, 178955183, 262271568 ...

Termes polynômiaux

Degré 0

Suite constante $u(n)=1$, récurrence $u(0)=1,\ u(n+1)=u(n)$, fonction génératrice $g_0(x)=\frac{1}{1-x}$.
1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 ...

Degré 1

Entiers naturels $u(n) = n$ a pour fonction génératrice $g_1(x) = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 2 4, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35 , 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46...

Entiers naturels impairs $u(n) = 2n + 1$, fonction génératrice $g(x) = 2\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.
Vérification en essayant `taylor((1+x)/(1-x)^2,x)` dans le logiciel `gp/pari`.
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99...

Degré 2

Nombres polygonaux. Pour un polygone à K côtés, le terme de rang n est le polynôme de degré 2

$$u(n) = \frac{(K-2)n^2 - (K-4)n}{2} = \frac{n((K-2)n - K + 4)}{2} = \frac{K-2}{2}n^2 - \frac{K-4}{2}n$$

de la variable n, ce polynôme peut être déterminé à partir des trois valeurs $u(0) = 0, u(1) = 1, u(2) = K$.
La fonction génératrice s'obtient à partir de celles de n^2 et de n, elle est

$$g(x) = \frac{K-2}{2} \times \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{K-4}{2} \times \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x\left((K-3)x+1\right)}{(1-x)^3}.$$

$K = 3$. Nombres triangulaires $u(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, fonction génératrice $g(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$
0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225...

$K = 4$. Carrés $u(n) = n^2$, fonction génératrice $g_2(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$
0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961, 1024, 1089, 1156, 1225, 1296, 1369, 1444, 1521, 1600, 1681, 1764, 1849, 1936, 2025, 2116, 2209, 2304, 2401...

$K = 5$. Nombres pentagonaux $u(n) = \frac{n(3n-1)}{2}$, fonction génératrice $g(x) = \frac{x(2x+1)}{(1-x)^3}$
0, 1, 5, 10, 18, 27, 39, 52, 68, 85, 105, 126, 150, 175, 203, 232, 264, 297, 333, 370, 410, 451, 495, 540, 588, 637, 689, 742, 798, 855, 915, 976, 1040, 1105, 1173, 1242, 1314, 1387, 1463, 1540, 1620, 1701, 1785, 1870, 1958, 2047, 2139, 2232, 2328, 2425...

$K = 6$. Nombres hexagonaux $u(n) = n(2n-1)$, fonction génératrice $g(x) = \frac{x(3x+1)}{(1-x)^3}$
0, 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276, 325, 378, 435, 496, 561, 630, 703, 780, 861, 946, 1035, 1128, 1225, 1326, 1431, 1540, 1653, 1770, 1891, 2016, 2145, 2278, 2415, 2556, 2701, 2850, 3003, 3160, 3321, 3486, 3655, 3828, 4005, 4186...

Degré 3 ou plus

Cubes $u(n) = n^3$, récurrence $u(n+1) = 4u(n) - 6u(n-1) + 4u(n-2) - u(n-3)$, fonction génératrice $g_3(x) = xg_2'(x) = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.
0, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375, 4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261, 10648, 12167, 13824, 15625, 17576, 19683, 21952, 24389, 27000, 29791, 32768, 35937, 39304,

42875, 46656, 50653, 54872, 59319, 64000, 68921, 74088, 79507, 85184, 91125, 97336, 103823, 110592, 117649 . . .

$u(n) = n^4$, récurrence $u(n+1) = 5u(n) - 10u(n-1) + 10u(n-2) - 5u(n-3) + u(n-4)$, fonction génératrice $g_4(x) = xg_3'(x) = \dfrac{x(1+11x+11x^2+x^3)}{(1-x)^5}$.
0, 1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, 14641, 20736, 28561, 38416, 50625, 65536, 83521, 104976, 130321, 160000, 194481, 234256, 279841, 331776, 390625, 456976, 531441, 614656, 707281, 810000, 923521, 1048576, 1185921, 1336336, 1500625, 1679616, 1874161, 2085136, 2313441, 2560000, 2825761, 3111696, 3418801, 3748096, 4100625, 4477456, 4879681, 5308416, 5764801 . . .

Suites chaotiques

Suites de Douglas Hofstadter

Gödel Escher Bach La première de ces suites est extraite du livre 'Gödel Escher Bach' de Douglas Hofstadter.
Chaque terme est la somme de deux termes précédents par la récurrence $Q(1) = Q(2) = 1$ et pour $n > 2$, $Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2))$.
1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 16, 14, 14, 16, 16, 16, 16, 20, 17, 17, 20, 21, 19, 20, 22, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 24, 24, 24, 32, 24, 25, 30, 28, 26, 30, 30, 28, 32, 30, 32, 32, 32, 32, 40, 33, 31, 38, 35, 33, 39, 40, 37, 38, 40, 39, 40, 39, 42, 40, 41, 43, 43, 46, 44, 45, 47, 47, 46, 48, 48, 48, 48, 48, 48, 64, 41, 52, 54, 56 . . .

Hofstadter-Conway $a(1) = a(2) = 1, a(n) = a(a(n-1)) + a(n - a(n-1))$
1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 21, 22, 23, 24, 24, 25, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 30, 31, 31, 31, 31, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 38, 39, 40, 41, 42, 42, 43, 44, 45, 45, 46, 47, 47, 48, 48, 48, 49, 50, 51, 51, 52, 53, 53, 54, 54, 54, 55, 56, 56, 57 . . .

S. M. Tanny A well-behaved cousin of the Hofstadter sequence, $a(0) = a(1) = a(2) = 1, a(n) = a(n - 1 - a(n-1)) + a(n - 2 - a(n-2))$.
1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 24, 25, 26, 26, 27, 28, 28, 28, 29, 30, 30, 31, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 32, 33, 34, 34, 35, 36, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40, 40, 40, 40, 41, 42, 42, 43, 44, 44, 44, 45, 46, 46, 47, 48, 48, 48, 48, 48 . . .
À compléter . . .