

Il s'agit de déterminer le rang des puissances de 2 dans la suite croissante associée à l'ensemble S autogénéré de Kimberling

$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 32, 43, 44, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 59, 60, 62, 63, 64, 86, 87, 88, 91, 92, 94, 95, 96, 107, 108, 110, 111, 112, 118, 119, 120, 123, 124, 126, 127, 128, 171, 172, 174, 175 \dots\}$

Les positions des puissances de 2 sont

0, 1, 3, 6, 11, 19, 32, 53, ...

Rappel : La définition de S est

- (i) 1 appartient à S
- (ii) Si $x \in S$ alors $2x \in S$ et $4x - 1 \in S$.

Les sous-ensembles de S ou intervalles d'entiers $I(n)$ ci-dessous sont définis de telle manière que $I(0) = \{1\}$, $I(1) = \{2\}$ et qu'ensuite, pour $n \geq 2$, les $I(n)$ contiennent tous les éléments de S depuis $2^{n-1} + 1$ jusqu'à 2^n inclus, (les deux extrémités de $I(n)$ sont distinctes pour $n \geq 2$ et sont incluses).

$I(0)$	=	[1]		1	
$I(1)$	=	[2]		1	
$I(2)$	=	3, [4]		2	= 1 pair + 1 impair
$I(3)$	=	6, 7, [8]		3	= 2 pairs + 1 impair
$I(4)$	=	11, 12, 14, 15, [16]		5	= 3 pairs + 2 impairs
$I(5)$	=	22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, [32]		8	= 5 pairs + 3 impairs
$I(6)$	=	43, 44, 46, 47, 48, 54, 55, 56, 59, 60, 62, 63, [64]...	13	= ...	

Dans le tableau, les puissances de 2 sont placées entre crochets pour une meilleure lisibilité. Les nombres d'éléments sont indiqués dans la partie droite du tableau.

D'après la construction de S , un élément x de $I(n)$ est — suivant sa parité — soit le double d'un élément de $I(n-1)$ soit le quadruple moins un d'un élément de $I(n-2)$ ce qui entraîne $|I(n)| = |I(n-1)| + |I(n-2)|$.

En considérant les valeurs initiales $|I(0)| = F(1) = 1$ et $|I(1)| = F(2) = 1$, on obtient $|I(n)| = F(n+1)$.

Finalement on en déduit que le rang de 2^n dans la suite est $|I(0)| + \dots + |I(n)| - 1 = F(1) + F(2) + \dots + F(n+1) - 1 = F(n+3) - 2$.

Résultat.

Le rang de l'élément 2^n de la suite de Kimberling est $F(n+3) - 2$