La proptiété suivante est connue sous le nom de « théorème de Beatty »

Théorème 1 *Soient p et q deux nombres irrationnels et strictement positifs dont la somme des inverses est 1. Tout intervalle réel ouvert $]N\ N+1[$ dont les bornes sont deux entiers naturels non nuls consécutifs, contient un multiple et un seul, soit de p, soit de q.*

autre forme

Corollaire 1 *Soient les deux irrationnels strictement positifs $p, q \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \mathbb{Q}$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*

On montre que les deux ensembles A *et* B *ci-dessous forment une partition de* $\mathbb{N}^\star$
$A = \{\lfloor np \rfloor\} = \{\lfloor p \rfloor, \lfloor 2p \rfloor, \lfloor 3p \rfloor, \lfloor 4p \rfloor, \ldots, \lfloor np \rfloor, \ldots\}$ *et*

$B = \{\lfloor nq \rfloor\} = \{\lfloor q \rfloor, \lfloor 2q \rfloor, \lfloor 3q \rfloor, \lfloor 4q \rfloor, \ldots, \lfloor np \rfloor, \ldots\}$.

<u>Démonstration</u>

N désignant un entier naturel non nul, Le nombre de multiples *non nuls* de p inférieurs à N est le quotient euclidien de N par p c'est-à-dire la partie entière $\lfloor \frac{N}{p} \rfloor$. Le nombre de multiples non nuls de q inférieurs à N est de même $\lfloor \frac{N}{q} \rfloor$.

Comme p et q sont irrationnels leurs multiples non nuls ne sont pas entiers et on a les inégalités strictes

$$\frac{N}{p} - 1 < \lfloor \frac{N}{p} \rfloor < \frac{N}{p}$$
$$\frac{N}{q} - 1 < \lfloor \frac{N}{q} \rfloor < \frac{N}{q}$$

En ajoutant on obtient

$$\frac{N}{p} - 1 + \frac{N}{q} - 1 < \lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor < \frac{N}{p} + \frac{N}{q}$$
$$N(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - 2 < \lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor < N(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$$
$$N - 2 < \lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor < N$$

d'où

$$\lfloor \frac{N}{p} \rfloor + \lfloor \frac{N}{q} \rfloor = N - 1$$

Comme ce résultat est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, le nombre de multiples avant $N+1$ est N, et donc il existe un multiple et un seul de p ou de q entre N et $N+1$.

Attention, il n'y a pas de multiple non nul dans $]\,0\ 1\,[$ car p et q sont supérieurs à 1, ensuite il existe un multiple et un seul dans chaque intervalle, ce qui correspond bien à un total de $N-1$ multiples non nuls avant N.