B A C C A L A U R É A T   G É N É R A L

SESSION 2002

———-

MATHÉMATIQUES

Série : **ES**

———-

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 3 heures. – COEFFICIENT : 5

———-

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

Le candidat doit traiter les DEUX exercices et le problème.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

Exercice 1 *5 points*

commun à tous les candidats

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense	398	451	423	501	673	956	1077	1255	1427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par $3,98$ cm).

2. a. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i).
Un ajustement affine paraît-il justifié ?

b. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	$5,986$	$6,111$	$6,047$	$6,217$					

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, z_i). Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}).

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

4. En 2000 les ménages ont dépensé $68,9$ milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et $3,1\,\%$ de ces dépenses concernent les produits informatiques.
Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

Exercice 2 *5 points)*

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Une école de commerce a effectué une enquête, en Janvier 2000, auprès de ses jeunes diplômés des trois dernières promotions afin de connaître leur insertion professionnelle.
À la première question, trois réponses seulement sont proposées :

A « La personne a une activité professionnelle »
B « La personne poursuit ses études »
C « La personne recherche un emploi ou effectue son service national ».

On a constaté que $60\,\%$ des réponses ont été envoyées par des filles.
Dans l'ensemble des réponses reçues, on a relevé les résultats suivants :
• $65\,\%$ des filles et $55\,\%$ des garçons ont une activité professionnelle ;
• $20\,\%$ des filles et $15\,\%$ des garçons poursuivent leurs études.

$1.$ On prend au hasard la réponse d'un jeune diplômé.

$a.$ Montrer que la probabilité qu'il poursuive ses études est égale à $0,18$.

$b.$ Calculer la probabilité qu'il exerce une activité professionnelle.

$2.$ On prend au hasard la réponse d'une personne qui poursuit ses études ; quelle est la probabilité que ce soit la réponse d'une fille (on donnera le résultat sous forme fractionnaire) ?

$3.$ On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante trois réponses (on suppose que ce choix peut être assimilé à un tirage successif avec remise).
A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité que l'une au moins des réponses soit celle d'un jeune diplômé poursuivant ses études.

$4.$ Dans l'ensemble des réponses des jeunes diplômés exerçant une activité professionnelle, la répartition des salaires bruts annuels en milliers d'euros est la suivante :

Salaire brut annuel S	$20 \leq S < 22$	$22 \leq S < 26$	$26 \leq S < 30$	$30 \leq S < 34$	$34 \leq S < 38$	$38 \leq S < 40$
Pourcentage	5	15	28	22	20	10

Quel est le salaire brut annuel moyen ?

Problème *(10 points)*

Commun à tous les candidats

PARTIE A

On considère la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - 2\,x + 3)e^x - 4$.

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b. Etudier les variations de f asur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à $]1\,;2[$.
   Donner une valeur arrondie à 10^{-3} près de x_0.

3. Déduire des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique un produit, en quantité x exprimé en tonnes, sa capacité de production ne pouvant dépasser 3 tonnes. Le coût total de fabrication de ce produit, en centaines de milliers d'euros, est donné par : $C_T(x) = (x - 3)e^x + 3\,x + 4$.

Le coût moyen est défini sur $]0\,;3]$ par la formule suivante : $C_m = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

1. Pour tout x de $]0\,;3]$ calculer $C'_m(x)$ et vérifier que l'égalité suivante est vraie : $C'_m = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
   En déduire le sens de variation de C_m sur $]0\,;3]$.

2. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût minimum ? Quel est le coût moyen minimum (arrondi au millier d'euros) d'une tonne de ce produit ?

PARTIE C

Une tonne du produit fabriqué est vendue $300\,000$ euros ; toute la production est vendue.

1. a. Le bénéfice algébrique, en centaines de milliers d'euros, réalisé après la fabrication et la vente de x tonnes du produit est noté $B(x)$. Montrer l'égalité suivante : $B(x) = (3 - x)\,e^x - 4$.
   b. Étudier le sens de variation de B sur $[0\,;3]$. Quelle est la production pour laquelle le bénéfice est maximum ?

2. a. Tracer la courbe représentative de B dans un plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 5 cm pour une tonne en abscisse et 2 cm pour $100\,000$ euros en ordonnée).
   b. À l'aide du graphique, déterminer à $0,1$ près les quantités à produire pour que l'entreprise réalise un gain.