Julie possède depuis plusieurs mois un téléphone mobile pour lequel elle a souscrit un forfait mensuel de deux heures. Soucieuse de bien gérer ses dépenses, elle étudie l'évolution de ses consommations.

Elle a constaté que :

- Si pendant le mois noté n elle a dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant noté $(n+1)$ est $\frac{1}{5}$.
- Si pendant le mois noté n elle n'a pas dépassé son forfait, la probabilité qu'elle le dépasse le mois suivant est $\frac{2}{5}$.

Pour n entier naturel strictement positif, on désigne par A_n l'événement « Julie a dépassé son forfait le mois n » et par B_n l'événement contraire.
On pose $p_n = p(A_n)$ et $q_n = p(B_n)$; on a $p_1 = \frac{1}{2}$.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. a. Donner les probabilités de A_{n+1} sachant que A_n est réalisé et de A_{n+1} sachant que B_n est réalisé.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, les égalités suivantes sont vraies :
$p(A_{n+1} \cap A_n) = \frac{1}{5}p_n$ et $p(A_{n+1} \cap B_n) = \frac{2}{5}q_n$

   En déduire que l'égalité suivante est vraie : $p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}p_n$

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $u_n = p_n - \frac{1}{3}$.

   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme u_1.

3. Ecrire u_n puis p_n en fonction de n. Déterminer la limite de (p_n).