BTS INFORMATIQUE DE GESTION 1998

Mathématiques

Durée : 4 heures Coefficient : 3

Le (la) candidat(e) doit traiter les trois exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des calculatrices est autorisé.
Le formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

RESPECT DES CONSIGNES (arrondis, échelles, ...) : 1 point

EXERCICE 1 : (10 points)

(Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre)

Dans une région touristique, une chaîne hôtelière offre une capacité de 12 200 nuitées par semaine, dont les prix varient entre 100 F et 400 F.

On désigne par x le prix d'une nuitée et par y le nombre de nuitées, en fonction du prix proposé.

Pour la première semaine de juillet, cette chaîne hôtelière enregistre le nombre, noté z, de demandes qui lui sont parvenues. Le résultat figure dans le tableau ci-dessous.

Prix d'une nuitée : xi	100	150	200	250	300	350	400
Nombre de nuitées offertes : yi	800	900	1200	1500	2000	2500	3300
Nombre de nuitées demandées : zi	5 134	4 346	3 678	2 728	2 636	2 231	1 888
$ti = \ln(yi)$	$6,6846$	$6,8024$	$7,0901$	$7,3132$	$7,6009$	$7,8240$	$8,1017$
$vi = \ln(zi)$	$8,5436$	$8,3770$	$8,2101$	$7,9113$	$7,8770$	$7,7102$	$7,5433$

PARTIE I : Etude statistique de ces séries

On considère les quatre séries (x_i, y_i), (x_i, t_i), (x_i, z_i), (x_i, v_i), de coefficients de corrélation linéaire respectifs : r_1, r_2, r_3, r_4.

1° Le tableau ci-dessous donne, à 10^{-4} près, trois des quatre coefficients de corrélation linéaire. Calculer de même r_2. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.

r_1	r_2	r_3	r_4
$0,9703$		$-0,9744$	$-0,9905$

2° Des deux séries (x_i, y_i) et (x_i, t_i), laquelle relève le mieux d'un ajustement affine ? Pourquoi ? Même question pour les deux séries (x_i, z_i) et (x_i, v_i).

3° Déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de t en x.
Dans la réponse, les coefficients seront remplacés par leurs arrondis à 10^{-4} près. Aucun calcul intermédiaire n'est exigé.
On admettra qu'une équation de la droite d'ajustement de v en x est : $v = -0,0033x + 8,8581$.

4° En déduire y et z sous la forme : $y = a\,e^{b\,x}$ et $z = c\,e^{d\,x}$. Dans les réponses, a et c seront remplacés par leurs arrondis à un près.

5° Le prix pour lequel l'offre est égale à la demande s'appelle le prix d'équilibre, noté x_0.
Calculer x_0 en utilisant les résultats de la question précédente.

PARTIE II : Exploitation du modèle théorique

L'hôtelier envisage la construction d'un nouvel hôtel dans la région. Les nuitées y seraient toutes au même prix. Il s'adresse à un bureau d'étude qui travaille alors avec :

— d'une part la fonction d'offre définie par : $y = 459\,e^{0{,}0049\,x}$

— d'autre part la fonction de demande définie par : $z = k(x) = 7\,031\,e^{\frac{-x}{300}}$ où x, positif ou nul, est le prix d'une nuitée.

1° Etudier les variations de la fonction de demande. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} k(x)$.
A quelle situation hôtelière correspondent les résultats trouvés ?

2° Le projet sera abandonné si la demande est inférieure à 500 nuitées par semaine. A partir de quel prix de la nuitée l'étude conclut-elle à l'abandon du projet ?

3° On se place dans le cas où toutes les demandes sont satisfaites. On se propose alors de calculer la recette $g(x)$ d'une semaine.

a) Expliquer pourquoi on a : $g(x) = 7\,031\,e^{-\frac{x}{300}}$.

b) Soit la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$, par : $f(x) = x\,e^{-\frac{x}{300}}$.
Etudier les variations de cette fonction ; on admettra que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Quelle est la recette maximale fournie par l'étude, au franc près ?
c) Soit un repère orthogonal dont les unités graphiques sont : 2 cm pour 100 F sur l'axe des abscisses, et 10 cm pour 100 F sur l'axe des ordonnées.

Tracer dans ce repère la courbe représentative de la fonction f.

d) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq 100$.

EXERCICE 2 : (4 points)

1° On considère un ensemble E muni d'une structure d'algèbre de Boole.

a) Soit l'expression $A = a\,b\,c + a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\,c$ où a, b, c désignent trois éléments de E. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b) Montrer, par un calcul direct, que : $A = a\,c + \overline{a}\,b\,c$ ou encore $A = a\,c + b\,c$.

2° Un immeuble comprend six logements dont les surfaces figurent dans le tableau ci-dessous :

numéro du logement	1	2	3	4	5	6
superficie, en m^2	55	105	112	228	247	253

Les logements 1 et 3 appartiennent à Monsieur A, les logements 2 et 4 appartiennent à Madame B, les 5 et 6 appartiennent à Monsieur C. Chacun détient à l'assemblée des copropriétaires un nombre de voix égal à la superficie totale de ses logements, exprimée en m^2. Ainsi, Monsieur A dispose de : $55+112 = 167$ voix.

Une proposition concernant le remplacement de la chaudière est mise au vote à l'assemblée. Pour être adoptée, elle doit recueillir la majorité des voix, soit 501 voix. Si A vote "pour", son vote favorable est désigné par : a. S'il vote "contre", ou s'il s'abstient, son vote est désigné par : $\overline{a}$. De même pour B et C.

a) Quelle situation de vote traduit le produit booléen : $\overline{a}\,b\,c$?

b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour les 8 situations de votes possibles :

situations possibles	nombre de voix	proposition votée (écrire oui ou non)
abc	1 000	oui
$\overline{a}\,b\,c$		
$a\,\overline{b}\,c$		
$a\,b\,\overline{c}$		
$\overline{a}\,\overline{b}\,c$		
$\overline{a}\,b\,\overline{c}$		
$a\,\overline{b}\,\overline{c}$		
$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$		

c) Ecrire l'expression booléenne qui exprime la condition pour que la proposition soit adoptée.

d) En utilisant les résultats de la première question 1°, écrire cette condition sous forme simplifiée, puis la traduire par une phrase explicative.

EXERCICE 3 : (5 points)

Une usine fabrique trois types de pièces, dans un même matériau. Le nombre total de pièces fabriquées est désigné par N, leur masse totale (en kg) par M, le coût total d'expédition (en francs) par C.

On peut synthétiser cette situation par un tableau :

type de pièces	P_1	P_2	P_3
coût d'expédition d'une pièce, en francs			
masse d'une pièce, en kg			
nombre de pièces fabriquées	x	y	z

Le système (1) ci-dessous fournit des informations complémentaires sur cette fabrication :

$$(1) \quad \begin{cases} x+y+z & = N \\ x+2\,y+z & = M \\ 40\,x+20\,y+10\,z & = C \end{cases}$$

1° Recopier et compléter le tableau.

2° Résoudre le système (1) par la méthode du Pivot de Gauss (les calculs intermédiaires seront soigneusement présentés).

3° Soient les vecteurs :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} N \\ M \\ C \end{pmatrix}$$

Quelle doit être la matrice A pour que le système (1) s'écrive : $A \times V = B$?

4° On désigne par D la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Calculer le produit de matrices : $D \times A$.

5° Sans effectuer explicitement les produits de matrices en cause, mais en précisant les propriétés du calcul matriciel utilisées, démontrer l'équivalence : $A \times V = B \Longleftrightarrow V = D \times B$.

6° Déduire de la question précédente V en fonction de N, M, C.

7° Dans cette question : $C = 8\,100$ F ; $M = 360$ kg ; $N = 250$.

Combien a-t-on fabriqué de pièces de chaque catégorie ?