# BTS INFORMATIQUE DE GESTION 1996

**Mathématiques**

Durée : 4 heures Coefficient : 3

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
it L'usage des instruments de calcul est autorisé.

**EXERCICE 1 :** (4 points)

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1° Calculer $M^2$ et $M^3$.

2° Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $M^2 = a\,M + b\,I$.

3° Exprimer alors $M^3$ en fonction de $M$ et de $I$ puis écrire $M^3$ sous forme de matrice à trois lignes et trois colonnes.
Comparer avec le résultat obtenu à la première question.

4° a) Déduire, de l'égalité trouvée à la deuxième question, que l'on peut écrire
$I = \frac{1}{2}M \times (3\,I - M)$.

b) En déduire une matrice $P$ telle que $M \times P = I$.
c) Écrire $P$ sous forme de matrice à trois lignes et trois colonnes.
d) Calculer $P \times M$.

**EXERCICE 2 :** (6 points)

*Les questions 1°, 2° et 3° peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.*

La société ARIANE a mis au point depuis quelques années un logiciel de gestion destiné aux entreprises. Le tableau suivant donne pour les années 1990 à 1995 les montants $x_i$ des ventes du logiciel et yi des dépenses publicitaires, exprimées en milliers de francs.

| Années | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 4 500 | 4 800 | 4 950 | 5 100 | 5 250 | 5 400 |
| $y_i$ | 26 | 27 | 29 | 31 | 32 | 35 |

1° a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre $x$ et $y$ (les calculs intermédiaires ne sont pas demandés ; donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près).

b) Pourquoi la valeur de ce coefficient justifie-t-elle un alignement linéaire de $y$ en $x$ ?

c) Déterminer une équation de la droite de régression de $y$ par rapport à $x$ par la méthode des moindres carrés (les calculs intermédiaires ne sont pas demandés).

d) On suppose que la tendance ne change pas et que le budget des dépenses publicitaires pour l'année $1996$ est de $37$ milliers de francs.

Calculer en utilisant le 1° c) une estimation du montant des ventes pour l'année $1996$.

2° La société ARIANE cherche à s'implanter dans une nouvelle région. Désirant obtenir une estimation de la proportion $p$ d'entreprises de cette région intéressées par son logiciel, elle interroge $500$ entreprises tirées au hasard (avec remise) ; $340$ répondent qu'elles sont disposées à acheter son logiciel.

a) Déterminer une estimation ponctuelle de $p$.
b) Déterminer un intervalle de confiance de $p$ au seuil de confiance $0,97$ (pour les bornes de cet intervalle on donnera des valeurs approchées à $10^{-3}$ près).

3° La société ARIANE achète à un fournisseur des disquettes par lots de $1\ 000$. Une étude statistique a montré que la probabilité pour qu'une disquette choisie au hasard dans un lot de $1\ 000$ soit défectueuse est $0,03$.

On désigne par $Z$ la variable aléatoire mesurant le nombre de disquettes défectueuses dans un lot de $1\ 000$ disquettes.
a) Quelle est la loi suivie par $Z$ ? Donner les paramètres de cette loi.
b) Calculer l'espérance mathématique $m$ et l'écart type $s$ de $Z$ (on donnera une valeur approchée de $s$ arrondie au dixième).
c) On admet que la loi de $Z$ peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(m', s')$. Justifier que $m' = 30$ et $s' = 5,4$.
Déterminer en utilisant cette loi normale une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la probabilité $P(18 \leq Z \leq 42)$.

**EXERCICE 3 :** (10 points)

**A** – On considère les équations différentielles :

$$xy' - 2y = 2\ln(x) - 3 \quad E) \qquad (()$$

$$xy' - 2y = 0 \quad E') \qquad (()$$

où $y$ désigne une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, où $y'$ est sa fonction dérivée et où $\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de $x$.

1° Résoudre l'équation différentielle (E').
2° Vérifier que la fonction numérique $j$ définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $j(x) = 1 - \ln(x)$ est une solution particulière de (E).

3° En déduire la solution générale de (E).

4° Déterminer la solution de (E) qui s'annule pour $x = 1$.

**B** – 1° Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = -x^2 - \ln(x) + 1$.

a) Calculer $g(1)$.
b) Sachant que $g$ est strictement décroissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs

de $x$.

2° Soit $f$ la fonction numérique définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = -\frac{\ln x}{x} + x.$$

On note $(C)$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm sur chaque axe).

a) Déterminer la limite de $f$ en $0$ et la limite de $f$ en $+\infty$ . Montrer que $(C)$ admet deux asymptotes $(D)$ et $(\Delta)$ dont l'une, $(D)$ , a pour équation $y = x$.
Étudier la position de $(C)$ par rapport à $(D)$ suivant les valeurs du réel $x$, strictement positif.

b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ élément de $]\,0\,;\,+\infty\,[$ .

c) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$. En déduire les variations de $f$.

d) Écrire une équation de la tangente $(T)$ à la courbe $(C)$ au point d'abscisse $e$.

e) Représenter graphiquement $(C)$ , $(D)$ , $(\Delta)$ et $(T)$ dans le repère

**C** – Soit $U$ la suite définie par : $U_0 = 3$ et, pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

1° En utilisant les variations de $f$ montrer, pour tout entier naturel $n$, que si $U_n > 1$ alors $Un + 1 > 1$. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, on a $Un > 1$.
2° Vérifier que, pour tout entier naturel $n$, on a :

$$U_{n+1} - U_n = -\frac{\ln U_n}{U_n}.$$

Déterminer à l'aide du résultat du C-1° le signe de $U_{n+1} - U_n$.
En déduire le sens de variation de la suite $U$.

3° Déduire des questions C-1° et C-2° que la suite $U$ converge. Déterminer la limite $l$ de cette suite sachant que $l$ est solution de l'équation $f(x) = x$.