BTS INFORMATIQUE DE GESTION 1995

Mathématiques

Durée : 4 heures Coefficient : 3

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère la suite de nombres réels $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $U_0 = 2$ et par la relation $U_{n+1} = \dfrac{2\,U_n + 1}{U_n + 2}$ vérifiée pour tout entier naturel n.

Le but de l'exercice est d'exprimer U_n en fonction de n.

1° Calculer U_1, U_2 et U_3.

2° On admet qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unique telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$U_n = \frac{3\,a_n - 1}{3\,a_n - 2}.$$

a) Montrer que $a_0 = 1$.
b) Exprimer U_{n+1} en fonction de a_{n+1} , puis de a_n et en déduire que la suite vérifie, pour tout n entier naturel, la relation : $a_{n+1} = 3\,a_n - 1$.
c) Calculer a_1, a_2 et a_3.

3° Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie, pour tout entier naturel n, par $b_n = a_n - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\dfrac{1}{2}$.
b) Calculer b_n en fonction de n.
c) En déduire l'expression de a_n puis celle de U_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 : (6 points)

Les questions A, B et C sont indépendantes.

Pour chaque résultat demandé, on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

A – Un atelier s'approvisionne avec des pièces produites en grande série. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse d'une pièce exprimée en grammes. On admet que X suit une loi normale d'espérance mathématique $m = 500$ et d'écart type s .
1° On suppose dans cette question que s est égal à 5. Les pièces présentent le défaut A si leur masse n'est pas dans l'intervalle $[\,495\,;\,505\,]$. On prélève au hasard une pièce du stock. Quelle est la probabilité qu'elle présente le défaut A ?

2° Quelle est la valeur maximale de s pour qu'une pièce du stock tirée au hasard présente le défaut A avec une probabilité inférieure ou égale à $0,05$?

B – On suppose que 5 % des pièces livrées présentent le défaut A. On prélève avec remise n pièces du stock. Y est la variable aléatoire égale au nombre de pièces présentant le défaut A parmi les n pièces prélevées.

1° Quelle est la loi suivie par Y ?

2° Pour $n = 20$, calculer la probabilité $P(Y = 2)$.

3° Pour $n = 80$, on admettra que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson.

a) Montrer que le paramètre de cette loi de Poisson est égal à 4. b) En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités $P(Y = 8)$ et $P(Y \geq 3)$.

4° Pour $n = 400$, on peut approcher la loi de Y par une loi normale.

a) Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

b) Déterminer la probabilité $P(Y \leq 10)$.

C – Les pièces du stock peuvent aussi présenter un défaut B.
On veut estimer la proportion des pièces du stock présentant le défaut B par un intervalle de confiance.
Pour cela on prend un échantillon de 1000 pièces du stock et on constate que 70 d'entre elles présentent le défaut B.

Déterminer un intervalle de confiance de la proportion de pièces du stock présentant le défaut B au seuil de confiance $0,95$.

EXERCICE 3 : (9 points)

Les deux courbes demandées seront tracées sur des feuilles différentes.

A – Soit f la fonction définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

On note (C)la courbe représentative de f dans un repère orthonormal .

1° Déterminer les réels a et b tels que, pour tout x élément de $]\,1\,;\,+\infty\,[$, $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.

2° a) Étudier la limite de f en 1 et la limite de f en $+\infty$. En déduire que (C)admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

b) Étudier les variations de f et tracer (C)dans le repère orthonormal (unité : 1 cm).

3° Soit u un nombre réel strictement supérieur à 1.

a) Démontrer que l'on a $1 < 2 - \dfrac{1}{u} < 2 + \dfrac{1}{u}$.

b) Calculer l'aire S_u de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations respectives $x = 2 - \dfrac{1}{u}$ et $x = 2 + \dfrac{1}{u}$.

B – Soit g la fonction définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

On note (G)la courbe représentative de g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Vérifier que, pour tout réel u strictement supérieur à 1, on a $S_u = 2g(u)$.

2° a) Étudier la limite de g en 1 et la limite de g en $+\infty$. En déduire que (G)admet deux asymptotes dont on donnera des équations.

b) Étudier les variations de g et tracer (G)dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

3° Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de la partie du plan comprise entre la courbe (G), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 2$ et $x = 3$. (Pour ce calcul on pourra utiliser des intégrations par parties).