BTS INFORMATIQUE DE GESTION 1994

Mathématiques

Durée : 4 heures   Coefficient : 3

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul est autorisé.

EXERCICE 1 : (5 points)

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

1° Calculer A^2.

2° On admet que, pour tout entier naturel n non nul, il existe un nombre réel a_n tel que A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2\,a_n & 1-2\,a_n & 2\,a_n \\ 2a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}$$

a) Calculer $A^{n+1} = A^n\,A$.
b) En déduire la relation : $a_{n+1} = 3 - 2\,a_n$.

3° Soit la suite (b_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $b_n = a_n - 1$.
a) Montrer que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
b) Calculer b_n puis a_n en fonction de n.

4° En déduire A_n en fonction de n.

EXERCICE 2 : (4 points)

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale arrondie à 10^{-1} près.
Pour mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, le directeur d'une agence bancaire réalise une étude relative à la durée de traitement des dossiers.
Un échantillon aléatoire non exhaustif de 30 dossiers traités a donné :

Durée en minutes	$[0, 10[$	$[10, 20[$	$[20, 30[$	$[30, 40[$	$[40, 50[$	$[50, 60[$
Nombre	3	6	10	7	3	1

a) Calculer des valeurs approchées de la moyenne et de l'écart-type des durées de traitement des dossiers de cet échantillon.

b) En déduire des estimations ponctuelles $\overline{X}$ et s de la moyenne m et de l'écart type σ de la population totale des dossiers traités.

c) Soit la variable aléatoire X, qui à tout échantillon aléatoire non exhaustif de taille 30 de cette population, associe sa moyenne. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}\left(m, \dfrac{\sigma}{30}\right)$.
Donner une estimation de m par l'intervalle de confiance de centre $\overline{X}$, avec le coefficient de confiance 95 %,

fourni par cet échantillon, en prenant pour σ la valeur s.

EXERCICE 3 : (11 points)

Les parties A, B, C sont indépendantes.

A – On considère l'équation différentielle : $xy' + y = -\dfrac{1}{x^2}$ (E) où y est une fonction numérique de la variable réelle x, définie et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ et y' est sa fonction dérivée.

1° Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + y = 0$.

2° a) Vérifier que la fonction g définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ est solution de (E).

b) Déterminer la solution générale de (E).
c) En déduire la solution particulière u de (E) telle que $u(1) = 0$.

B – Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2} - \frac{1}{\ln x}.$$

1° Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

2° Calculer la dérivée f' de f et montrer que $\dfrac{\ln x - 2}{x\ \ - \ln x)^3}$.

3° Étudier les variations de f.

4° Représenter graphiquement f dans le plan rapporté à un repère orthogonal. (unités graphiques : 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).

C – 1° Soit la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\ln x}.$$

a) Calculer la dérivée h' de h.
b) Déterminer une primitive F de f sur $]\,1\,;\,+\infty\,[$.

2° On désigne par v_n la valeur moyenne de f sur $[e^n; e^{n+1}]$, c'est-à-dire le réel : $v_n = \dfrac{1}{e^{n+1} - e^n}\displaystyle\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)dx$, où n est un entier.

a) Calculer v_n en fonction de e et n.
b) En déduire la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.