Logique

1 Calcul Propositionnel

1.1 Généralités

1.1.1 Élément d'un ensemble

$x \in E$ qui se lit « x appartient à E » ou encore « x est un élément de E », est une « phrase » mathématique avec son *sujet* x et son *verbe* $\in$, elle est **vraie** si l'élément x est effectivement dans E, elle est **fausse** lorsque l'élément x n'est pas dans E.
De ce point de vue, x et E étant donnés, $x \in E$ est appelée une **proposition logique**, elle est soit vraie, soit fausse.
Si la proposition

- $x \in E$ est vraie, on dit que sa valeur de vérité est : **V** ou **Vrai** ou **1**,

- $x \in E$ est fausse, sa valeur de vérité est : **F** ou **Faux** ou **0**

D'une manière plus générale, quand on pourra décider que les « affirmations » sont vraies ou sont fausses (et rien d'autre) on utilisera la *logique*.

Exemples.

a – En anglais, dans les langages informatiques on utilise des variables logiques, que l'on déclare de type *booléen* et qui peuvent prendre soit la valeur TRUE (vrai) soit la valeur FALSE (faux) :
`VAR x, y, z : BOOLEAN;` (en PASCAL)
`boolean x, y, z;` (en Java)
Suivant les langages on leur affectera les valeurs de vérité en écrivant 0, 1, `FALSE` ou `TRUE` :

```
x := TRUE;
x = 1;
```

b – Soient les propositions p, q, ..., écrivons leurs valeurs de vérité :

proposition	le nom de la proposition	vrai ou faux	V ou F	0 ou 1
$253\,456 \in N$	p	vrai	V	1
$457,2$ est un entier pair	q	faux	F	0
$35 + 22 \leq 57$	r	vrai	V	1
le 22 octobre est un jour férié	s			
L'année 1 990 est bissextile	t			
L'année 2 000 est bissextile	u			

1.2 Les connecteurs logiques

À partir d'une ou de propositions logiques p, q, ...et en utilisant la « **négation** », les connecteurs « **et** » « **ou** », « **si ...alors** », « **si et seulement si** » on va pouvoir former de nouvelles propositions.
Connaissant les valeurs de vérité des propositions logiques p, q, ...On déterminera par un calcul les valeurs de vérité des propositions obtenues.

1.2.1 La négation

La négation de la phrase $5,4 \in Z$ est $5,4 \notin Z$, la première proposition est fausse, la seconde est vraie.

Définition : La négation d'une proposition logique p est la proposition non-p, souvent notée $\overline{p}$ ou encore $\neg p$.

Si la valeur de vérité de p est **Vrai**, celle de sa négation $\overline{p}$ est **Faux**.

Si la valeur de vérité de p est **Faux**, celle de sa négation $\overline{p}$ est **Vrai**.

Table de vérité de la négation On indique dans le tableau suivant les valeurs de vérité possibles pour une proposition p et sa négation $\overline{p}$, c'est la *table de vérité* de p.

p	$\overline{p}$
Faux	Vrai
Vrai	Faux

Mais on simplifiera le plus souvent en :

p	$\overline{p}$
F	V
V	F

1.2.2 la conjonction

Il s'agit du connecteur logique « et ».

exemples :
3 est inférieur à 5 et 3 est supérieur à -2.
6 est pair et 6 est inférieur à 12.

Ces deux phrases précédentes sont vraies, mais que penser des suivantes ?
12 est supérieur à 15 et 12 est inférieur à 4.
27 est pair et 10 est pair.
ABC est un triangle isocèle et ABC est un triangle rectangle.
La tour de Pise est en Italie et La Tour Eiffel aux États-Unis.

Définition : La conjonction des deux propositions logiques p, q est la proposition notée « p et q », ou encore $p \wedge q$ ou parfois encore $p \cdot q$, $p\,q$.
p et q est **Vrai** si et seulement si p est Vrai, q est Vrai,
p et q est **Faux** lorsque l'une au moins des deux propositions p et q est fausse.

Table de vérité de la conjonction

p	q	p et q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

1.2.3 la disjonction

Il s'agit du connecteur logique « ou ».

exemples :
A est défini par les entiers x tels que $x \leq 9$ ou $x \geq 2$. On a $A = Z$.
Seules pourront entrer les personnes munies d'une carte d'identité ou d'un passeport.
Les pommes trop petites ou abîmées seront rejetées.

Ce soir j'irai au théatre ou au cinéma.
S'il pleut ou s'il fait froid je mettrai des bottes.

Définition : La disjonction des deux propositions logiques p, q est la proposition notée « p ou q », ou encore $p \vee q$.
$p \vee q$ est **Vrai** si et seulement si l'une au moins des deux propositions p, q est vraie.
$p \vee q$ est **Faux** lorsque les propositions p, q sont toutes les deux fausses.

Table de vérité de la disjonction

p	q	p ou q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

La disjonction « ou » est encore appelée « ou inclusif » et parfois notée **ou**$_i$ car « p ou q » est vrai même dans le cas où les deux propositions p, q sont toutes les deux vraies. C'est aussi pour la distinguer du « ou exclusif » dont la table de vérité est donnée ci-dessous.
Sauf indication expresse du contraire, le « ou » sera toujours inclusif.

1.2.4 le ou exclusif « ou$_e$ »

On emploie de préférence « soit ...soit ...» .
exemples :
certains exemples sont volontairement ambigus, on peut parfois employer aussi le ou inclusif, avec ou non la même signification.

la balle est bleue ou est rouge.

(Elle est nécessairement d'une seule couleur, on peut utiliser ou$_i$, ou$_e$).

Je prendrai de la glace ou de la tarte.

(Probablement pas les deux . C'est ou$_e$, sauf pour des personnes que je connais !)

Table de vérité du ou exclusif

p	q	p ou$_e$ q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

1.2.5 L'implication

Il s'agit de « si ..., alors ...» de « entraîne» , « implique » .
L'implication est souvent employée et pour cette raison il y a de nombreuses manières de l'exprimer.
exemples :

S'il pleut, alors je prends mon parapluie.
Si $x \in \{5; 6; 7\}$, alors $x \leq 9$.

Il est bien évident que cette dernière phrase est vraie, pour cette raison dans la colonne de droite de la table ci-dessous ne figurent que des V :

pour $x =$	$x \in \{5; 6; 7\}$	$x \leq 9$	Si $x \leq 5$, alors $x \leq 9$
2	F	V	V
7	V	V	V
8	F	V	V
12	F	F	V

Si on peut diviser x par 4 et par 6, alors on peut aussi le diviser par 24.   (FAUX).

Cette fois cette phrase est fausse. Dessinons encore un tableau, une ligne suffira.

$x =$	on peut diviser x par 4 et par 6	on peut diviser x par 24	Si ...
12	V	F	F

Définition : L'implication notée $p \Rightarrow q$ est fausse dans le cas où p est vrai et q faux, dans tous les autres cas, l'implication est vraie.

Table de vérité de l'implication

p	q	$p \Rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Remarque : La notation $p \Leftarrow q$ peut se comprendre comme $q \Rightarrow p$. En exercice on peut dresser sa table de vérité.
$p \Leftarrow q$ peut se lire « p si q » ou « p se déduit de q »

1.2.6 L'équivalence logique

Correspond aux « si et seulement si », « entraîne et réciproquement » , « équivaut logiquement à ».

exemples :

x est pair équivaut à x est multiple de 2.

ABC est équilatéral équivaut à $AB = AC = BC$.

ces deux phrases sont vraies, pas la suivante :

ABC est isocèle équivaut à $AB = AC$.   (c'est FAUX).

Table de vérité de l'équivalence logique

p	q	$p \iff q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

1.2.7 Remarques

type	connecteur	nom français	en anglais ou en info
unaire	$\neg$	non	not
binaire	$\wedge$	et	and
	$\vee$	ou ou$_i$	or
		ou$_e$	xor

1.3 Tableaux des propriétés des opérateurs logiques

1.3.1 Négation

négation de	logiquement équivalents	
négation	$\neg(\neg p)$	p
et	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
ou	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
implication	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
équivalence logique	$\neg(p \iff q)$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

1.3.2 Opérateurs binaires

propriétés des différents opérateurs binaires

connecteurs propriétés	et	ou	ou_e
associativité	Oui	Oui	Oui
commutativité	Oui	Oui	Oui
élément neutre	Oui : V	Oui : F	Oui : F
idempotence	Oui	Oui	Non
élément absorbant	Oui : F	Oui : V	Oui : V

propriétés du « et »

propriétés	logiquement équivalents	
associativité	$p \wedge (q \wedge r)$	$(q \wedge q) \wedge r$
commutativité	$p \wedge q$	$q \wedge p$
élément neutre	$p \wedge V$	p
idempotence	$p \wedge p$	p
élément absorbant	$p \wedge F$	F

Les propriétés du « ou » sont identiques ;

Distributivités

Distributivité de	logiquement équivalents	
$\wedge$ sur $\vee$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge q)$
$\vee$ sur $\wedge$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee q)$

implication et équivalence logique

connecteurs	propositions logiquement équivalentes utilisant $\wedge$, $\vee$, $\neg$
$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
$p \iff q$	$(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$

2 Prédicats

2.1 Exemples de présentation

2.1.1 propositions et prédicats

quelques propositions :
$3 < 4$, $3^2 = 10$, $3 \in N$, $\pi \in Q$ …dont les valeurs de vérité sont soit V soit F.
quelques prédicats :
$x < 4$, $x^2 = 10$, $x \in N$, $x \in Q$ …dont la valeur de vérité dépend de la variable x.
(En remplaçant x par 3 ou par π on obtient les propositions précédentes).
prédicats à plusieurs variables :
$x \leq y$, $x \leq xy$, $x^2 + y^2 \geq 0$, $x < y \Rightarrow y > x$, $x < y \wedge x < y \Rightarrow y < z, \dots$
Pour certaines valeurs des variables, ces prédicats ont pour valeur de vérité V ou F, mais il se peut que certains prédicats sont vrais pour toutes les valeurs des variables, ou bien sont faux !

2.2 quantificateurs

2.2.1 Pour tout. Il existe.

a) $x^2 > -1$ est vrai pour toutes les valeurs de x (x réel) : « pour tout x, on a $x^2 > -1$ ».

b) $x^2 < 1$ est vrai pour certaines valeurs de x : « il existe x tel que $x^2 < 1$ ».
Dans ce cas on n'essaie pas de voir si $x^2 < 1$ est faux pour d'autres valeurs de x, il suffit de trouver une valeur de x vérifiant la relation, par exemple $x = 0$.

c) « il existe x tel que $x^2 > -1$ ». Cette phrase est vraie.

« pour tout » est le quantificateur universel noté $\forall$. « il existe » est le quantificateur existentiel noté $\exists$.
On écrira : a) $\forall x, x^2 > -1$; b) $\exists x, x^2 < 1$; c) $\exists x, x^2 > -1$.

2.2.2 Les quantificateurs universel et existentiel

Si $P(x)$ est un prédicat à (au moins) une variable x, on forme deux nouveaux prédicats $\forall x, P(x)$ et $\exists x, P(x)$ à l'aide des quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.
$\forall x, P(x)$ est vrai si $P(x)$ est vrai pour toute valeur de la variable x.
$\exists x, P(x)$ est vrai si une valeur (au moins) de la variable x rend vrai le prédicat $P(x)$.

variable libre, variable liée.
Dans le prédicat $x^2 > -1$, la variable x est une variable libre.
Dans $\exists x, x^2 < 1$, la variable x est une variable liée.
Dans $\forall t, t + u \neq t$, la variable u est libre, la variable t est liée.

formules à plusieurs quantificateurs.
$\forall x \exists y, y = 2x$, est un prédicat (ou formule propositionnelle) vraie, lorsque x et y sont entiers ou des réels. Les deux variables x et y sont liées.
$\exists y \forall x, y = 2x$ est fausse car y étant choisi, on pourra toujours trouver une valeur de x telle que $y \neq 2x$.
L'ordre d'apparition des quantificateurs a généralement une grande importance, toutefois lorsque plusieurs quantificateurs du même type se suivent, leur ordre est indifférent, par exemple : $\forall x\ \forall y\ \exists z,\ z = 2x + 3y$ est logiquement équivalent à $\forall y\ \forall x\ \exists z,\ z = 2x + 3y$ (mais pas à $\forall x\ \exists z; \forall y,\ z = 2x + 3y$).
De même $\exists x\ \exists y\ \exists z,\ Q(x, y, z)$ est logiquement équivalent à $\exists z\ \exists x\ \exists y,\ Q(x, y, z)$, par exemple.

La formule $\exists x\ \forall y,\ P(x, y)$ entraîne $\forall y\ \exists x,\ P(x, y)$ mais les deux formules ne sont généralement pas logiquement équivalentes. Par exemple :
$\exists x; \forall y,\ y + x = y$ est vraie, il suffit de remplacer x par 0 et de savoir que $\forall y,\ y + 0 = y$, on a donc aussi $\forall y\ \exists x,\ y + x = y$.
Par contre, si $\forall x\ \exists y,\ x + y = 2$ est bien vraie, (en effet, en remplaçant y par $2 - x$ on obtient $\forall x,\ x + 2 - x = 2$ qui est vraie), par contre $\exists y\ \forall x,\ x + y = 2$ est fausse.

2.2.3 négation

— La négation de $\exists x, P(x)$ s'écrit $\neg(\exists x, P(x))$ et est logiquement équivalente à $\forall x, \neg P(x)$.
— La négation de $\forall x, P(x)$ s'écrit $\neg(\forall x, P(x))$ et est logiquement équivalente à $\exists x, \neg P(x)$.

$\neg(\forall x, x + 1 = x)$ est logiquement équivalent à $\exists x, x + 1 \neq x$. (Vrai).
$\neg(\exists x, x = x^2)$ est logiquement équivalent à $\forall x, x \neq x^2$. (Faux).

$\neg(\forall x \exists y, y > 2x)$ est logiquement équivalent à $\exists x \forall y, x \leq y$. (Faux).
$\neg(\forall x \forall y, x + y = y + x)$ est logiquement équivalent à $\exists x \exists y, x + y \neq y + x$. (Faux).