Durée en minutes x_i	[0; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 60[	[60; 90[
Nombre n_i	4	10	14	6	6

TAB. 1 – Traitement des dossiers.

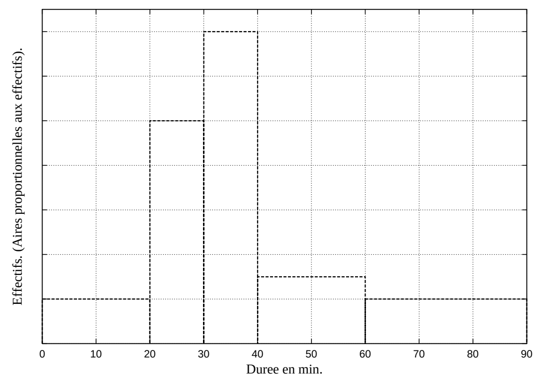

FIG. 1 – Histogramme des durées de traitement des dossiers.

Exercice I.

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale arrondie à 10^{-2} près mais les calculs devront être effectués avec la meilleure précision possible.

Pour mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, le directeur d'une agence bancaire réalise une étude relative à la durée de traitement des dossiers.

Un échantillon aléatoire de 40 dossiers traités a donné :

1. a. Dessiner l'histogramme de la série statistique. Indiquer la classe modale de la série.
Nombre de classes : 5, Nombre de classes modales : 1. Classes modales : [30 ; 40[

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type σ des durées de traitement des dossiers de cet échantillon.

Moyenne : $\bar{x} = 38,25$.
Variance : $V(x) = 350,6875 = 350.69$ à 10^{-2} près.
Écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = 18,726652 = 18,73$ à 10^{-2} près.

2. a. Indiquer dans un tableau les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants. Dessiner sur une même figure les polygones des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.

Tableau les effectifs cumulés :
Figure des deux polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants :

b. Déterminer graphiquement la médiane m de la série statistique, expliquer la méthode et effectuer

centres des classes c_i	10	25	35	50	75
Nombre n_i	4	10	14	6	6

TAB. 2 – Centres des classes

x_i	Effectifs cumulés croissants	Effectifs cumulés décroissants
0	0	40
20	4	36
30	14	26
40	28	12
60	34	6
90	40	0

TAB. 3 – Effectifs cumulés.

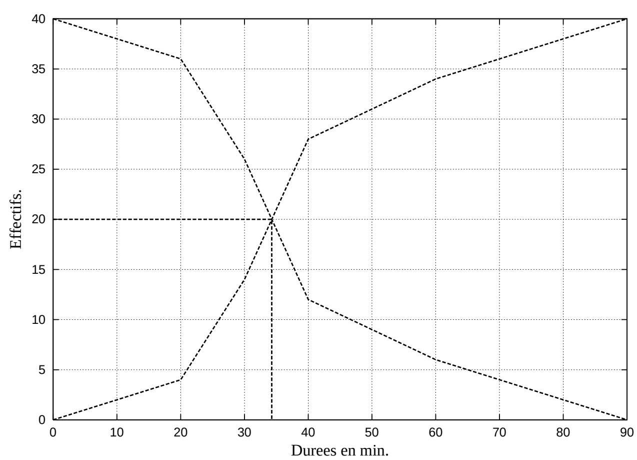

FIG. 2 – Polygones des effectifs cumulés.

Âge t_i en années	1	2	3	4	5	6
Coût y_i en kF	14	$15,5$	18	20	$23,3$	28
$z_i = \ln y_i$	$\ln 14$	$\ln 15,5$	$\ln 18$	$\ln 20$	$\ln 23,3$	$\ln 28$

TAB. 4 – *Coûts.*

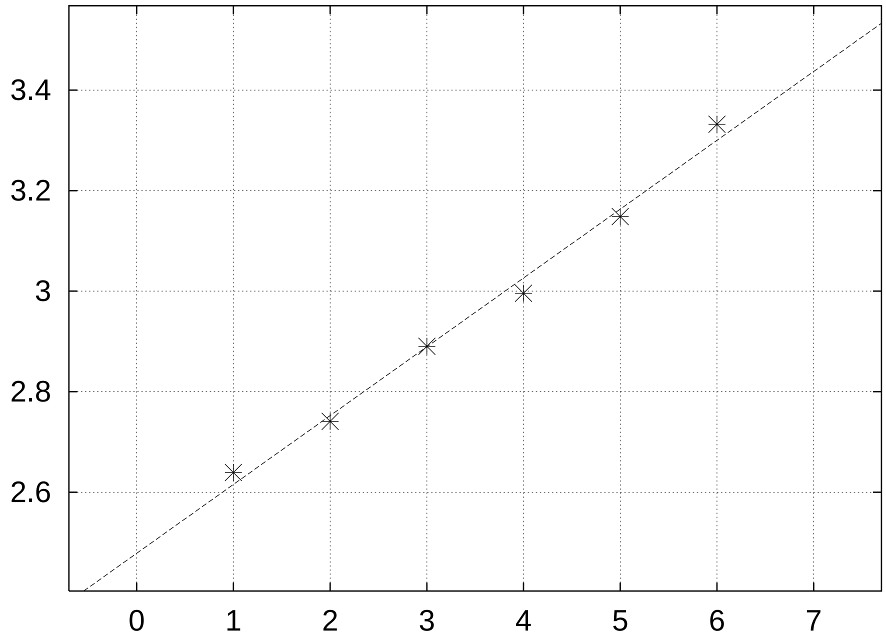

FIG. 3 – *Logarithme du coût.*

les constructions nécessaires sur la figure.
Le point d'intersection des deux lignes polygonales des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants de la figure *2* a pour abscisse la médiane m de la série statistique. Son ordonnée est le demi-effectif total, c.-à-d. 20. On peut donc voir que $m \approx 34$.

c. Déterminer par le calcul la médiane m de la série statistique, (détailler suffisamment les calculs pour que la méthode utilisée soit compréhensible, il ne s'agit pas de donner seulement la valeur de la médiane).
Le demi-effectif total est 20 qui se trouve entre les deux effectifs cumulés 14 et 28 obtenus pour les durées de 30 min. et de 40 min.
On a donc $m = 30 + \frac{(40-30)\times(20-14)}{28-14}$
$m = 30 + \frac{10\times 6}{14}$
$m = 30 + \frac{30}{7}$
$m = 34,28$ à 10^{-2} près.

Exercice II.

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur approchée à 10^{-3} près.
Le coût annuel de maintenance d'un équipement informatique varie avec l'âge t des appareils.
Le tableau suivant indique, pour un même type d'équipement, ce coût y en fonction de t.
Dans ce tableau la troisième ligne correspond au logarithme népérien $z = \ln y$ du coût.

Âge t en années	7	8
Coût $y = e^{0,137t+2,478}$ en kF	$31,094$	$35,659$

TAB. 5 – *Coûts envisagés.*

1. a. Représenter le nuage de points $M_i \ (t_i;\, z_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

b. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ? Expliquer.
Les points du nuage semblent alignés, approximativement du moins, et il paraît raisonnable d'envisager un ajustement affine du nuage.

c. Quelles sont les coordonnées $(t_G;\, z_G)$ du point moyen G de ce nuage ? Placer le point G sur la figure.
$t_G = \bar{t} = 3,5$ et $z_G = \bar{z} \approx 2,958$ donc $G\,(3,5;\ 2,958)$.

2. Déterminer, pour la série statistique double des deux variables $(t;\, z)$,

a. le coefficient de corrélation linéaire r,
$r = 0,996$.

b. une équation $z = at + b$ de la droite de régression linéaire D de z en t, par la méthode des moindres carrés.
$D\ :\quad z = ax + b$, $a = 0,137$, $b = 2,478$ soit $z = 0,137x + 2,478$ (approximativement).

3. a. Les résultats obtenus à la question 2. confirment-t-ils l'observation faite à la question 1. b. ?
Le coefficient de corrélation linéaire $r = 0,996$ est très proche de 1, $(0,9 < r < 1)$, ce qui confirme l'observation faite à la question 1. b. et justifie l'ajustement affine.

b. Tracer la droite D sur la figure. Que peut-on observer pour D et le point G ?
G est bien sur la droite D.

4. a. Déduire de la réponse à la question 2. b. une expression du coût y en fonction de l'âge t.
Comme $z = \ln y$ on a $y = e^z$ d'où $y = e^{0,137t+2,478}$.

b. Montrer que le coût y peut s'exprimer en fonction de l'âge t par une relation de la forme $y = k \times \alpha^t$, calculer k et α.
$y = e^{0,137t+2,478}$ se transforme en $y = e^{0,137t} \times e^{2,478}$ et aussi $y = k \times \alpha^t$ avec $k = 11,9220$, $\alpha = 1,147$ soit $y = 11,922 \times 1,147^t$.

c. En admettant que l'évolution constatée du coût pendant ces six années puisse être utilisée pour prévoir le coût de la maintenance les années suivantes, indiquer les valeurs à envisager pour $t = 7$ et $t = 8$.

Exercice III.

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^{x} - 2x - 4.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O;\, \vec{i},\, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

x	$-\infty$		$\ln\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

TAB. 6 – Signe de $g(x) = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right)$

x	$-\infty$		$\ln\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x) - (-2x-4)$		$-$	0	$+$	
C et D		C sous D		C au-dessus de D	

TAB. 7 – Position de C par rapport à D.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} e^t = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$ $= \lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty$.
$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4 = e^{2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x} - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}}\right)$, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$ d'où $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} - e^{-x} - \frac{2x}{e^{2x}} - \frac{4}{e^{2x}} = \frac{3}{2} - 0 - 0 - 0 = \frac{3}{2}$. On en déduit $\lim_{x\to+\infty f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}e^{2x} = +\infty$.

2. Soit
$$g(x) = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right).$$

a. Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln\frac{2}{3}$ et que $\ln\frac{2}{3}$ est sa seule racine.
$\frac{3}{2}e^{\ln\frac{2}{3}} - 1 = \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} - 1 = 0$ donc $g\left(\ln\frac{2}{3}\right) = 0$.
$\frac{3}{2}e^x - 1$ s'annule pour la seule valeur $x = \ln\frac{2}{3}$ car la fonction $x \mapsto \frac{3}{2}e^x - 1$ est strictement croissante tout comme $x \mapsto \frac{3}{2}e^x - 1$.

Au lieu de ceci on peut aussi résoudre l'équation $g(x) = 0$ qui s'écrit :
$e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right) = 0$
e^x ne s'annule pas, on peut donc écrire seulement l'équation
$\frac{3}{2}e^x - 1 = 0$ puis
$e^x = \frac{2}{3}$ et enfin
$x = \ln\frac{2}{3}$ qui est la seule racine.

b. Étudier le signe de $g(x)$ sur R.
Le facteur e^x est strictement positif, l'autre facteur $\frac{3}{2}e^x - 1$ s'annule et change de signe en $\ln\frac{2}{3}$.

On peut aussi résoudre $\frac{3}{2}e^x - 1 > 0$ pour trouver $x > \ln\frac{2}{3}$.

c. Montrer que $f(x) - (-2x-4) = g(x)$. En déduire que la droite D d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à D.
En transposant on a $f(x) - (-2x-4) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x$ et en factorisant e^x, $f(x) - (-2x-4) = e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right)$ d'où $f(x) - (-2x-4) = g(x)$.
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^x\left(\frac{3}{2}e^x - 1\right) = 0(0-1) = 0$.
De $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-2x-4) = 0$ on déduit que la droite D d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à C.

Du tableau (*Tab. 6*) on déduit le tableau des positions de C et de son asymptote D.

3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in R$, $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$.
$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$.
Comme $(e^u)' = u'e^u$ on a $f'(x) = \frac{3}{2}2e^{2x} - e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$.
Par ailleurs $(3e^x + 2)(e^x - 1) = 3e^xe^x - 3e^x + 2e^x - 2 = 3e^{2x} - e^x - 2$ donc on a bien $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau

x	$-\infty$			0		$+\infty$
$e^x - 1$ et $f'(x)$			$-$	0	$+$	

TAB. 8 – Signe de la dérivée.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

TAB. 9 – Variations de f.

de variations de f.
$f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$, or $\forall_{x\in\mathbb{R}} e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$, comme $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, $e^x - 1$ s'annule et change de signe en $x = 0$.

Partie B

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions et deux seulement, l'une x_0 dans l'intervalle $]-\infty; 0]$, l'autre x_1 dans l'intervalle $]0; +\infty[$. En utilisant la calculatrice donner des encadrements d'amplitude 10^{-1} des deux racines x_0 et x_1.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, d'après l'étude des variations de f :

- f est dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $f(0) = -\frac{7}{2}$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine et une seule $x_0 < 0$ dans $\mathbb{R}_-$.
- f est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) = -\frac{7}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine et une seule $x_1 > 0$ dans $\mathbb{R}_+$.

$-2,1 \leq x_0 \leq -2$ et $0,8 \leq x_1 \leq 0,9$.

2. a. Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$ en posant $X = e^x$.
$X^2 - X - 4 = 0$ a deux racines -1 et $\frac{4}{3}$, l'équation $e^x = -1$ n'a pas de solution, l'équation $e^x = \frac{4}{3}$ a pour solution $\ln\frac{4}{3}$ qui est donc l'unique solution de $f'(x) = 2$.

b. En déduire qu'il existe un point unique A de la courbe C où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est $\ln\frac{4}{3}$.
L'équation $f'(x) = 2$ a pour solution unique $x_A = \ln\frac{4}{3}$ qui est l'abscisse du point A de C où la tangente a pour coefficient directeur $f'(x_A) = 2$.

c. Tracer la droite D, la courbe C et la tangente en A à la courbe C.

Partie C

1. Déterminer une primitive $F(x)$ de $f(x)$.
$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4$
comme e^{ax} a pour primitive $\frac{1}{a}e^{ax}$ on a
$F(x) = \frac{3}{4}e^{2x} - e^x - x^2 - 4x + \lambda$
où λ est une consante.

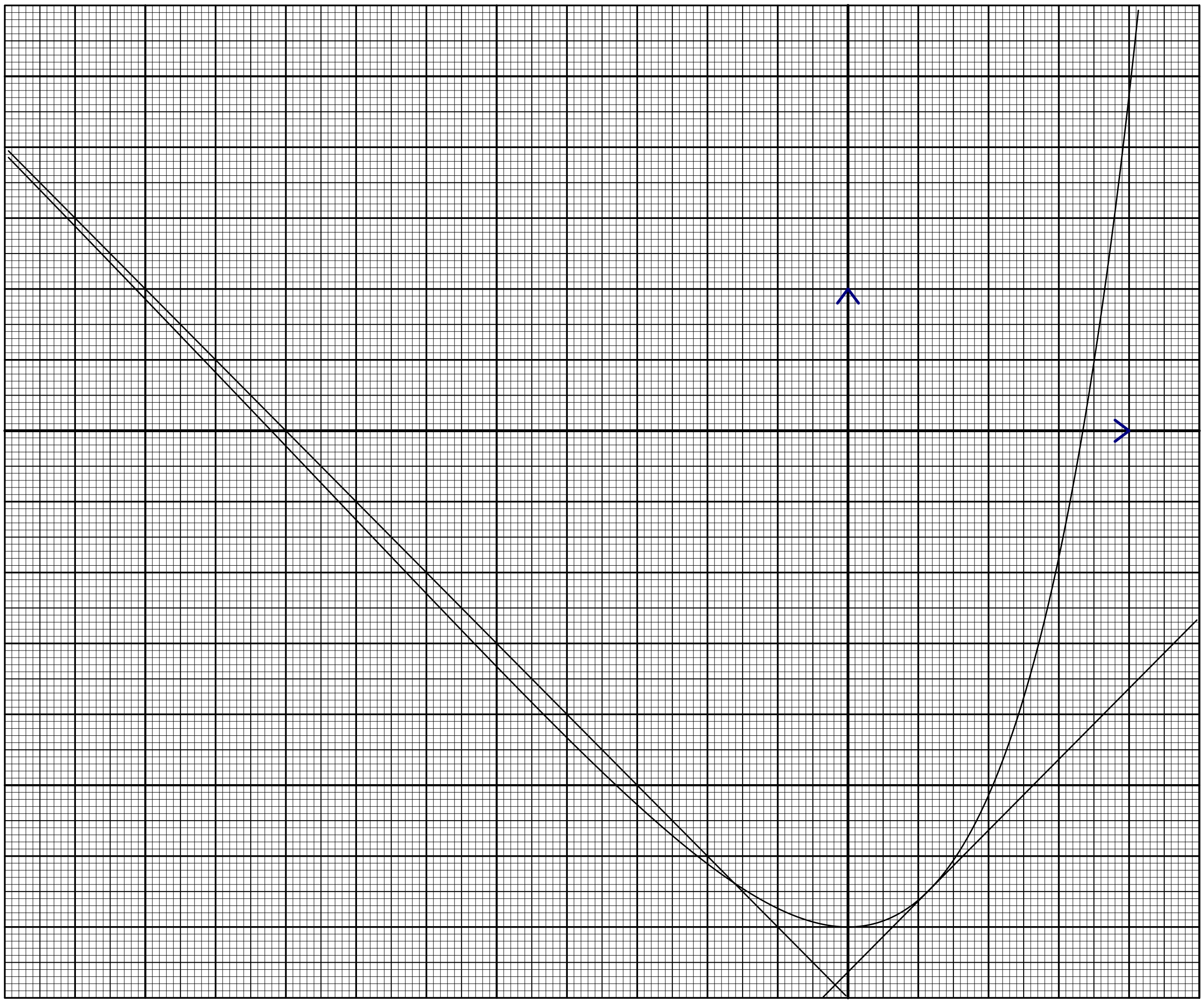

FIG. 4 – *Courbe C.*

2. a. Soit I l'aire en cm^2 de la partie S du plan définie par

$$M\,(x;\,y) \in S \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x_0 & \leq & x & \leq & x_1 \\ f(x) & \leq & y & \leq & 0 \end{array} \right.$$

Colorier ou hachurer la région S sur la figure.

b. Expliquer $I = -8 \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.

Les unités sur les axes sont 4 cm et 2 cm, la fonction f est négative sur l'intervalle $[x_0;\,x_1]$ et enfin $x_0 \leq x_1$, donc l'aire, en cm^2, de la région S est $I = -\,4 \times 2 \times \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.

c. Calculer une valeur approchée de I.

$I = -8 \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$

$I = -8 \left[\frac{3}{4}e^{2x} - e^{x} - x^2 - 4x\right]_{x_0}^{x_1}$

$I = -8(\frac{3}{4}e^{2x_1} - e^{x_1} - x_1^2 - 4x_1$
$\quad -\frac{3}{4}e^{2x_0} + e^{x_0} + x_0^2 + 4x_0)$.

En prenant pour le calcul $x_0 = -2$ et $x_1 = 0,8$ on obtient $I \approx 49,83336$,
soit environ $I = 50$ cm^2 à 1 cm^2 près.