A	bc	$b\overline{c}$	$\overline{b}\overline{c}$	$\overline{b}c$
a	1	0	1	1
$\overline{a}$	0	0	1	0

TAB. 1 – $A = (a + \overline{b})\ (a + \overline{c})\ (\overline{b} + c)$

B	bc	$b\overline{c}$	$\overline{b}\overline{c}$	$\overline{b}c$
a	1	1	0	1
$\overline{a}$	1	0	1	1

TAB. 2 – $B = \overline{a}\,b\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$

Exercice I.

Les questions 1. et 2. de l'exercice sont indépendantes.

L'ensemble E est muni d'une algèbre de Boole, on désigne par $\bar{a}$ le complément de a, par $a + b$ et ab la somme et le produit de a et de b.

1. Soit la fonction booléenne A des trois variables a, b, c :

$$A = (a + \overline{b})\ (a + \overline{c})\ (\overline{b} + c).$$

a. Développer et transformer algébriquement A en une somme de produits. Montrer que $A = a\,\overline{b} + a\,c + \overline{b}\,\overline{c}$.

A= $(a + a\overline{c} + a\overline{b} + \overline{b}\overline{c})\ (\overline{b} + c)$ en développant

$A = (a + \overline{b}\overline{c})\ (\overline{b} + c)$ par absorption

$A = a\overline{b} + ac + \overline{b}\overline{c} + 0$ en développant

$\boxed{A = a\overline{b} + ac + \overline{b}\overline{c}.}$

b. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

On obtient $\boxed{A = ac + \overline{b}\overline{c}.}$

c. Simplifier A algébriquement.

On sait que $A = a\overline{b} + ac + \overline{b}\overline{c}$ et on peut écrire

$A = a\overline{b}c + a\overline{b}\overline{c} + ac + \overline{b}\overline{c}$, on regroupe

$A = (a\overline{b}c + ac) + (a\overline{b}c + \overline{b}\overline{c})$ puis par absorption

$\boxed{A = ac + \overline{b}\overline{c}.}$

d. Montrer que $A = \overline{(b + c)(\overline{a} + \overline{c})}$.

$\overline{(b + c)(\overline{a} + \overline{c})} = \overline{(b + c)} + \overline{(\overline{a} + \overline{c})} = \overline{b}\overline{c} + ac = A$. D'où $\boxed{A = \overline{(b + c)(\overline{a} + \overline{c})}.}$

2. a. Soit la fonction booléenne B des trois variables a, b, c :

$$B = \overline{a}\,b\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

Simplifier B à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

$\overline{B}$	bc	$b\overline{c}$	$\overline{b}\overline{c}$	$\overline{b}c$
a	0	0	1	0
$\overline{a}$	0	1	0	0

TAB. 3 – $\overline{B} = \overline{c + ab + \overline{a}\overline{b}}$

On obtient $\boxed{B = c + ab + \overline{a}\overline{b}.}$

b. Montrer directement ce résultat par un calcul algébrique.

$B = (abc + \overline{a}bc + a\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}c) + (abc + ab\overline{c}) + (\overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c)$

$B = (bc + \overline{b}c) + ab + \overline{a}\overline{b} = c + ab + \overline{a}\overline{b}.$

$\boxed{B = c + ab + \overline{a}\overline{b}.}$

c. Montrer que $\overline{B} = a\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\,\overline{c}$.

d'où le résultat $\boxed{\overline{B} = a\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\,\overline{c}.}$

Exercice II.

Cet exercice a pour but de calculer une valeur approchée d'une intégrale.

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel t strictement supérieur à -1, par :

$$f(t) = \ln(t+1) + e^{-t}$$

($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

A. Étude de la fonction f.

1. a. Montrer que

$$f'(t) = \frac{e^t - (t+1)}{(t+1)\,e^t}.$$

On sait que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et que $(e^u)' = u'e^u$ donc $f'(t) = \frac{1}{t+1} - e^{-t} = \frac{1-(t+1)e^{-t}}{t+1} = \frac{e^t(1-(t+1)e^{-t})}{e^t(t+1)}$ $= \boxed{\frac{e^t-t-1}{e^t(t+1)}}$

b. On admettra que pour tout réel t on a $e^t \geq t+1$. Étudier les variations de f.

Comme pour tout réel t, $e^t \geq t+1$, le numérateur de $f'(t)$ est strictement positif, e^t l'est aussi et $t+1$ est strictement positif pour $t > -1$, on en déduit que $\boxed{f'(t) > 0.}$

$\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur }]-1;\, +\infty[.}$

La courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dessinée sur la figure ci-jointe (à compléter), les unités sont de 2 cm et 5 cm sur les deux axes.

2. a. Calculer la dérivée f'' de f'.

$f''(t) = (\frac{1}{t+1} - e^{-t})' = \frac{-1}{(t+1)^2} + e^{-t} = \frac{-1+(t+1)^2e^{-t}}{(t+1)^2} = \boxed{\frac{-e^t+(t+1)^2}{e^t(t+1)^2}}$
qui est du signe de $(t+1)^2 - e^t$

b. Montrer que $f''(x) = 0$ si et seulement si $(x+1)^2 - e^x = 0$.

$f''(t) = \frac{-e^t+(t+1)^2}{e^t(t+1)^2}$
s'annule ssi son numérateur s'annule : $(t+1)^2 - e^t = 0$.

On admettra que l'équation $f''(0) = 0$ a une solution que l'on appellera α, comprise entre $2,51$ et $2,52$. Placer le point $A\ (\alpha, f(\alpha))$ de la courbe (C) sur la figure.

B. Calcul d'une valeur approchée de $\int_0^\alpha f(t)dt$.

1. Pour tout nombre réel a positif ou nul, on pose :

$$F(a) = \int_0^a f(t)dt.$$

a. Expliquer $F(a) = \int_0^a \ln(t+1)dt + \int_0^a e^{-t}dt$.
C'est la linéarité de l'intégrale qui permet de l'écrire, on applique la propriété :
Si f et g sont intégrables sur $[a; b]$, alors $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

b. Calculer la dérivée de $(t+1)\ln(t+1) - t$ et en déduire $F(a)$ en fonction de a.
$((t+1)\ln(t+1) - t)' = \ln(t+1) + (t+1)\frac{1}{t+1} - 1 = \ln(t+1) + 1 - 1 = \boxed{\ln(t+1)}$
donc $\boxed{\text{une primitive de } \ln(t+1) \text{ est } (t+1)\ln(t+1) - t.}$

On a donc $F(a) = \int_0^a \ln(t+1)dt + \int_0^a e^{-t}dt$
$= [(t+1)\ln(t+1) - t]_0^a + [-e^{-t}]_0^a$
$= (a+1)\ln(a+1) - a - (0-0) + (-e^{-a} - (-e^0))$
$= (a+1)\ln(a+1) - a - e^{-a} + 1$
$\boxed{F(a) = (a+1)\ln(a+1) - a - e^{-a} + 1.}$

2. a. Expliquer, sans calculer l'intégrale, que $F(\alpha) \geq \alpha$.
$f(0) = 1$ et f est croissante donc pour tout $t \geq 0$ on a $f(t) \geq 1$ et donc $F(\alpha) \geq \int_0^\alpha 1dt = [t]_0^\alpha = \alpha$.
$\boxed{F(\alpha) \geq \alpha.}$

b. Démontrer, sans calculer, que $F(2,51) < F(\alpha) < F(2,52)$.
Pour $x > 0$, f est strictement positive donc $F(\alpha) = \int_0^\alpha f(t)dt$ est strictement croissante[1].
Comme $2,51 < \alpha < 2,52$ on en déduit $\boxed{F(2,51) < F(\alpha) < F(2,52).}$

c. En déduire, par le calcul, une valeur décimale approchée de $F(\alpha)$ à 10^{-2} près.
$F(2,51) = 2.8159440520$ et $F(2,52) = 2.8293230766$ d'où $\boxed{F(\alpha) = 2,82 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$
Remarque : La valeur trouvée $2,82$ *est légèrement supérieure à* $\alpha \approx 2,51$ *et on a montré précédemment que* $F(\alpha) \geq \alpha$.

3. Soit S la région du plan délimitée par les deux axes (Ot) et (Oy), par la courbe (C) et par la droite D d'équation $t = \alpha$. Hachurer la région S sur la figure.

[1] f est la dérivée de n'importe laquelle de ses primitives et donc de F. Comme F a sa dérivée f strictement positive pour tout $x > 0$, F est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, ce qui signifie que $\forall u, \forall v, u < v \Rightarrow F(u) < F(v)$.

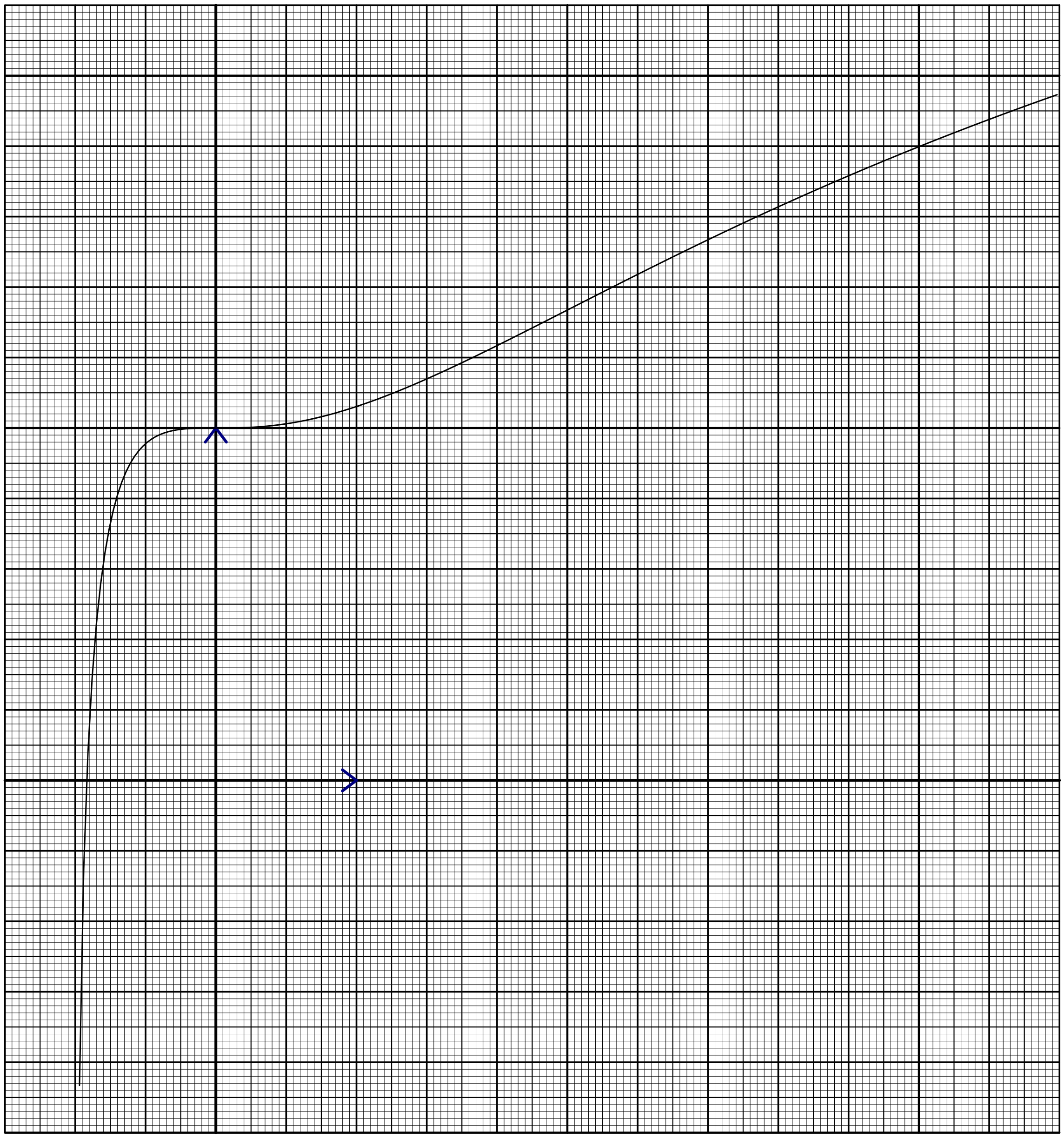

FIG. 1 – $f(x) = \ln(t+1) + e^{-t}$

Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la région S.
Comme les unités sont de 2 cm et 5 cm sur les axes, l'aire est $\boxed{2 \times 5 \times F(\alpha) = 10F(\alpha) \approx 28,2\ \mathrm{cm}^2.}$

Exercice III.

Partie A — Soit la fonction [2] numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$?
$f(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{e^{-x}+e^{-(-x)}} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}} = \frac{-(e^x-e^{-x})}{e^x+e^{-x}} = -\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = -f(x)$.
Comme pour tout x, $f(-x) = -f(x)$, $\boxed{f \text{ est une fonction impaire.}}$
On en déduit que $\boxed{\text{la courbe représentative } \mathcal{C} \text{ de la fonction } f \text{ admet l'origine } O \text{ comme centre de symétrie.}}$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

$\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = f(x)$.
$\boxed{f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}.}$

Partie B — Tracé de la courbe.

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
$f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$. $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.
Comme f est impaire, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$. $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.}$

c. En déduire aussi les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\boxed{\text{les droites d'équations } y = -1 \text{ et } y = 1 \text{ sont deux asymptotes}}$ à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f.

2. a. Montrer que la dérivée f' de f peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$

$f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u = e^x - e^{-x}$, $u' = e^x + e^{-x}$, $v = e^x + e^{-x}$, $v' = e^x - e^{-x}$.
$f'(x) = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})-e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{2e^x \times 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2} = \boxed{\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.}$

[2] Cette fonction $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ est connue sous le nom de « tangente hyperbolique » et est notée $\mathrm{th}(x)$ ou $\tanh(x)$. Elle est aussi définie comme le quotient des fonctions « sinus hyperbolique » $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ et « cosinus hyperbolique » $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, on a $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. On peut remarquer que $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$ et que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$. La fonction $\mathrm{sh}(x)$ est impaire et $\mathrm{ch}(x)$ est paire, leur quotient $\tanh(x)$ est donc impaire.

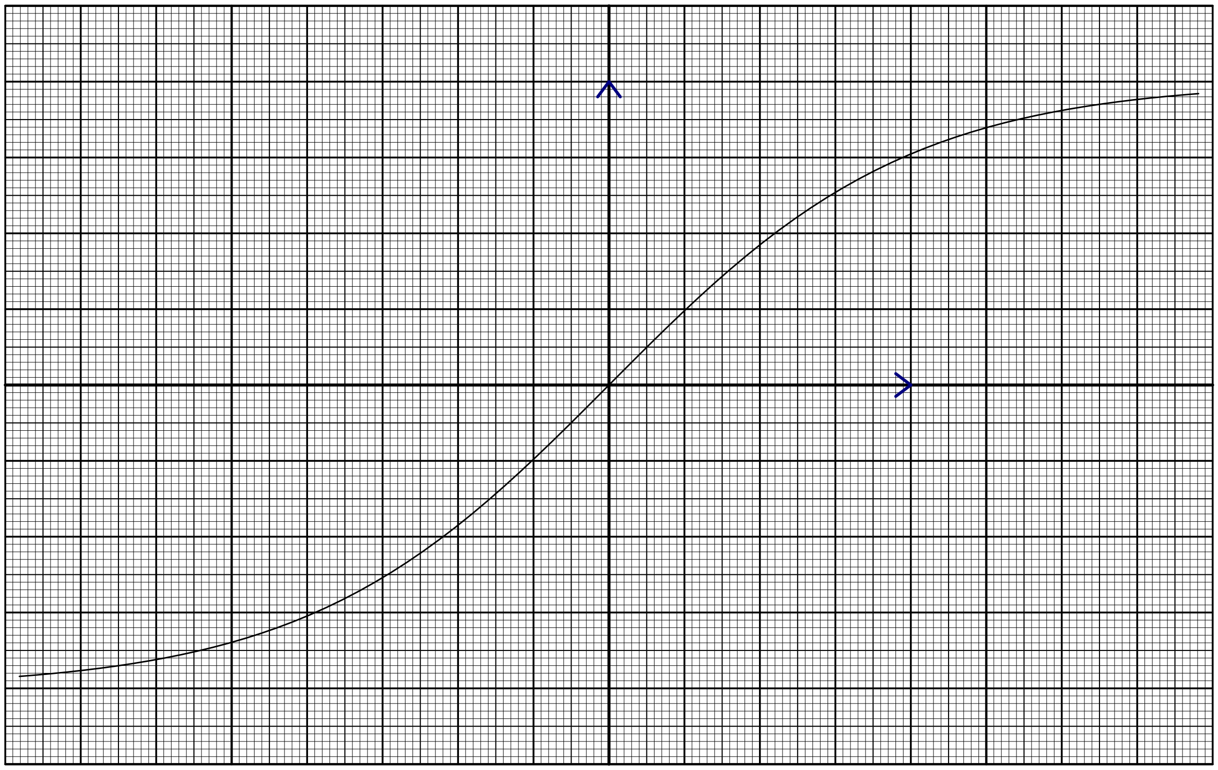

FIG. 2 – $\mathcal{C}$: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b. En déduire le sens de variation de f sur $I\!R$ et tracer le tableau de variations.
4 et le carré $(e^x + e^{-x})^2$ sont strictements positifs donc $f'(x) > 0$ et $\boxed{f \text{ est strictement croissante.}}$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
			1
$f(x)$		$\nearrow$	
	0		

ou

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
			1
$f(x)$		$\nearrow$	
	-1		

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.

Partie C — On se propose de déterminer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie S du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$, $x = \alpha$ où α est un nombre réel strictement positif. Représenter la région S sur la figure.

1. Montrer que pour tout $x \in I\!R$, $f(x) < 1$.

f est <u>strictement</u> croissante et $\lim_{x \to +\infty} = 1$ permettent d'affirmer que pour tout x, $f(x) < 1$.
On peut aussi dire que $e^x - e^{-x} < e^x < e^x + e^{-x}$ et comme $e^x + e^{-x} > 0$, en divisant l'inégalité par $e^x + e^{-x}$ on obtient $f(x) < 1$.
En calculant $1 - f(x) = \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0$ on obtient le même résultat.

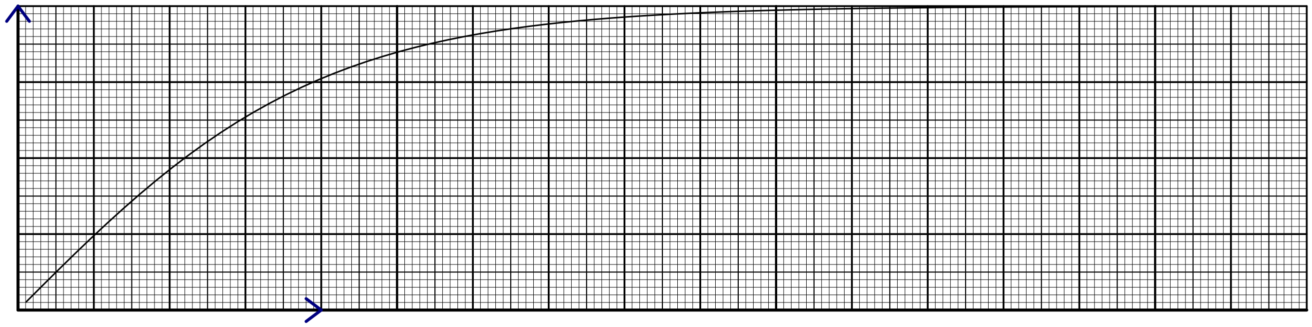

FIG. 3 – $\mathcal{C}$: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ lorsque $x \geq 0$.

2. a. On pose $u(x) = e^x + e^{-x}$. Montrer que

$$\forall x \in I\!R, \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

$u(x) = e^x + e^{-x}$ donc $u'(x) = e^x - e^{-x}$ et donc $\boxed{f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.}$

b. En déduire une primitive de f sur $I\!R$.
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc la fonction $\boxed{f \text{ a pour primitives } \ln(u(x)) = \ln(e^x + e^{-x}) + C.}$

c. Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α, d'abord sous la forme d'une intégrale, ensuite en calculant cette intégrale.

$\mathcal{A}(\alpha) = 4 \times 4 \times \int_0^\alpha (1 - f(x))dx = 16[x - \ln(e^x + e^{-x})]_0^\alpha = 16(\alpha - \ln(e^\alpha + e^{-\alpha}) - 0 + \ln(e^0 + e^0))$
$\boxed{\mathcal{A}(\alpha) = 16(\alpha - \ln(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \ln 2).}$

3. a. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.
$\alpha - \ln(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \ln 2 = \alpha - \ln(e^\alpha(1 + e^{-2\alpha})) + \ln 2$
$= \alpha - \ln(e^\alpha) - \ln(1 + e^{-2\alpha}) + \ln 2 = \alpha - \alpha - \ln(1 + e^{-2\alpha}) + \ln 2 = -\ln(1 + e^{-2\alpha}) + \ln 2$
$\lim_{\alpha \to +\infty} e^{-2\alpha} = 0$ donc $\lim_{\alpha \to +\infty} \ln(1 + e^{-2\alpha}) = \ln 1 = 0$ et on en déduit aussitôt
$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 16 \ \lim_{\alpha \to +\infty}(\alpha - \ln(e^\alpha + e^{-\alpha}) + \ln 2) = 16(0 + \ln 2) = 16 \ln 2$ $\boxed{\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = 16 \ \ln 2.}$

Remarque : *L'aire entre la courbe et l'asymptote, pour* $x \geq 0$*, est finie et vaut* $\ln 2$ *unités graphiques, ou* $16 \ln 2$ *cm*^{2}.

b. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de cette limite.
$16 \ \ln 2 = 16 \times 0,693147... =$ $\boxed{11.090 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$

4.. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathcal{A}(4)$.
$\mathcal{A}(4) = 16(4 - \ln(e^4 + e^{-4}) + \ln 2) = 16 \times 0,692811774187... = 11,0849... =$ $\boxed{11,085 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$