Exercice I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes. (Indiquer l'ensemble des solutions).

1. a.

$$\ln(x^2+3) = \ln(4) + \ln(x)$$

$\ln(x^2+3)$ et $\ln(x)$ sont définis ssi $x^2+3>0$ et $x>0$. L'équation est définie sur $]0;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned} \ln(x^2+3) &= \ln(4x) \\ x^2+3 &= 4x \\ x^2-4x+3 &= 0 \\ (x-1)(x-3) &= 0 \\ x \in \{1;\ 3\} \end{aligned}$$

b.

$$\ln\left((2x+3)^2\right) = -4$$

$\ln\left((2x+3)^2\right)$ n'est pas défini lorsque $2x+3=0$.

L'équation est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{-3}{2}\}$.

$(2x+3)^2 = e^{-4}$

$2x+3 = e^{-2}$ ou $2x+3 = -e^{-2}$

$x \in \left\{\frac{e^{-2}-3}{2};\ \frac{-e^{-2}-3}{2}\right\}$

c.

$$2\left(\ln(x+1)\right)^2 + \ln(x+1) = 6$$

$\ln(x+1)$ est défini ssi $x+1>0$. L'équation est définie sur $]-1;\ +\infty[$.

Soit $X = \ln(x+1)$, l'équation s'écrit

$2X^2 + X - 6 = 0$

Son discriminant est $\Delta = 1+48 = 49 = 7^2$.

Les racines sont

$X = \frac{-1-7}{4} = -2$ et $X = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}$.

On résoud ensuite $\ln(x+1) = -2$ qui a pour solution $x = e^{-2}-1$ qui convient et aussi $\ln(x+1) = \frac{3}{2}$ qui a pour solution $x = e^{\frac{3}{2}}-1$ qui convient aussi.

L'ensemble des solutions est $\left\{e^{-2}-1;\ e^{\frac{3}{2}}-1\right\}$.

d.

$$\ln(-3x^2+e^2+4) \leq 2$$

$-3x^2+e^2+4$ est positif entre ses racines donc l'équation est définie sur

$\left]-\sqrt{\frac{e^2+4}{3}};\ \sqrt{\frac{e^2+4}{3}}\right[$.

L'équation peut s'écrire

$$\begin{aligned} -3x^2+e^2+4 &\leq e^2 \\ -3x^2+4 &\leq 0 \\ x^2 &\geq \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$x \leq -2\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x \geq 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

L'ensemble des solutions est

$$\left]-\sqrt{\frac{e^2+4}{3}};\ -2\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{2\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{\frac{e^2+4}{3}}\right[.$$

e. Étudier le signe de l'expression x^2+x-2. Résoudre ensuite

$$\ln(2-x) + \ln(x+3) \leq 2\ln 2$$

$x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ a pour racines 1 et -2 et est positif à l'extérieur des racines, négatif entre les racines.

$\ln(2-x)+\ln(x+3) \leq 2\ln 2$ est défini ssi

$\begin{cases} 2-x>0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad x \in]-3;\ 2[.$

Léquation $\ln(2-x)+\ln(x+3) \leq 2\ln 2$ devient

$$\begin{aligned} \ln[(2-x)(x+3)] &\leq \ln 4 \\ (2-x)(x+3) &\leq 4 \\ -x^2-x+6-4 &\leq 0 \\ x^2+x-2 &\geq 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est

$]-3;\ -2] \cup [1;\ 2[$.

2. a.
$$\frac{e^{2x}+e^x-2}{e^{2x-1}}=0.$$

$$\begin{array}{rcl} e^{2x}+e^x-2 & = & 0\\ X^2+X-2 & = & 0\\ (X-1)(X+2) & = & 0 \end{array}$$
$X=1$ ou $X=-2$
$e^x=1$ ou $e^x=-2$
seule la première de ces deux équations a une solution : $x=0$.
L'ensemble des solutions est donc $\{0\}$.

b.
$$2e^{2x+4}-5e^{x+2}>-3$$

$$\begin{array}{rcl} 2e^{2x+4}-5e^{x+2} & > & -3\\ 2X^2-5X & > & -3\\ (2X^2-5X+3 & > & 0\\ (2X-3)(X-1) & > & 0 \end{array}$$
$X<1$ ou $X>\frac{3}{2}$
$X<1$ devient $e^{x+2}<1$ qui donne $x<0$.
$X>\frac{3}{2}$ devient
$$\begin{array}{rcl} e^{x+2} & > & \frac{3}{2}\\ x+2 & > & \ln\frac{3}{2}\\ x & > & -2+\ln\frac{3}{2} \end{array}$$
L'ensemble des solutions est donc
$]-\infty;\,-2[\,\cup\,]-2+\ln\frac{3}{2};\,+\infty[$.

c.
$$6e^{-x}+e^x\leq 5$$

En multipliant les deux membres par e^x qui est strictement positif :
$$\begin{array}{rcl} 6+e^{2x} & \leq & 5e^x\\ X^2-5X+6 & \leq & 0 \end{array}$$
$\Delta=25-24=1$
Les racines de X^2-5X+6 sont $X=2$ et $X=3$.
On a donc $2\leq X\leq 3$
$2\leq e^x\leq 3$
$\ln 2\leq x\leq \ln 3$
l'ensemble des solutions est $[\ln 2;\ \ln 3]$.

Exercice II.

1. À l'aide des théorèmes sur les limites, déterminer les limites demandées.

a. Soit $f(x)=2xe^x-e^{-x+2}$
déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0,$
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x+2}=\lim_{t\to+\infty} e^t=+\infty$
donc $\lim_{x\to-\infty}(2xe^x-e^{-x+2})=-\infty.$

$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
donc $\lim_{x\to+\infty} 2xe^x=+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2}=\lim_{t\to-\infty} e^t=0$
donc $\lim_{x\to+\infty}(2xe^x-e^{-x+2})=+\infty.$

b. Soit $f(x)=\frac{2e^x-x}{x^2+1}$,
Montrer que $f(x)=\frac{2e^x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$
et $f(x)=\frac{2e^x}{x^2}\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}$.
c'est immédiat.
Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.
$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}$
$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$
$\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x=0$ donc
$\lim_{x\to-\infty}(\frac{2e^x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1})=0.$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}$
$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}$
$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1.$
$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ donc
$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^x}{x^2}\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)=+\infty.$

2. Déterminer les dérivées et étudier leur signe. Tracer le tableau de variations. (On ne demande pas d'étudier les limites mais on peut les indiquer dans les tableaux).

a. $f(x) = 3e^x + e^{-x} - 4x + 1$.

$f'(x) = 3e^x - e^{-x} - 4 = \frac{3e^{2x} - 4e^x - 1}{e^x}$
$3X^2 - 4X - 1$ a pour discriminant
$\Delta = 28 = 4 \times 7$
et pour racines $\frac{2-\sqrt{7}}{3}$ et $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$.
$3X^2 - 4X - 1$ est négatif entre ses racines.
Seule $\frac{2+\sqrt{7}}{3}$ est positive.
$e^x = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ donne $x = \ln \frac{2+\sqrt{7}}{3}$ ou encore
$x = \ln(2 + \sqrt{7}) - \ln 3$, appelons α ce nombre.
Comme $e^x > 0$ on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. $f(x) = (x^2 - 2)e^{2x} + 2$.

$f'(x) = 2xe^{2x} + 2(x^2 - 2)e^{2x} = 2(x^2 + x - 1)e^{2x}$.
$f'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 1$ qui a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 2 cm sur chaque axe.

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{t\to-\infty} -te^t = 0$.
$\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x + 2xe^{-x}) = +\infty$.

b. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = xe^{-x}(xe^x - 2e^x + 2)$.
Il suffit de développer et voir que $e^{-x}e^x = 1$.

c. Étudier la limite de f en $-\infty$, on pourra utiliser l'expression obtenue à la question b. précédente.
$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
$\lim_{x\to-\infty}(xe^x - 2e^x + 2) = 2$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}(xe^x - 2e^x + 2) = -\infty$.

2. a. Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme $f'(x) = 2(x - 1)(1 - e^{-x})$.
d'abord calculons $2(x - 1)(1 - e^{-x}) = 2(x - xe^{-x} - 1 + e^{-x}) = 2x - 2xe^{-x} - 2 + 2e^{-x}$.
$f(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}$ donc sa dérivée est $f'(x) = 2x - 2 + 2e^{-x} - 2xe^{-x}$ et donc $f'(x) = 2(x - 1)(1 - e^{-x})$.

b. Étudier les variations de la fonction f.
On peut étudier le signe de $1 - e^{-x}$ en résolvant

$$\begin{aligned} 1 - e^{-x} &> 0 \\ 1 &> e^{-x} \\ 0 &> -x \\ x &> 0 \end{aligned}$$

$1 - e^{-x}$ s'annule en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$1 - e^{-x}$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-1+\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = 0 - 0 + 0 = 0$ et $f(1) = 1 - 2 + 2e^{-1} = -1 + \frac{2}{e}$

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet pour solution $x = 0$.
On a en effet calculé $f(0) = 0$ et donc 0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Montrer que cette équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution α dans l'intervalle $[1;\, +\infty[$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante sur $[1;\, +\infty[$, sa valeur en 1 est $f(1) = -1 + \frac{2}{e}$ strictement négative et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc la fonction f admet dans l'intervalle $[1;\, +\infty[$ une racine et une seule α.

Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.
En utilisant la calculatrice on obtient $f(1.5) = -0,0806\ldots$, $f(1,6) = 0,006068\ldots$ d'où $1,5 < \alpha < 1,6$.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique β. D'après les variations de f on voit que son maximum sur $]-\infty;\, 1]$ est 0, donc $f(x) = 1$ n'a pas de racine dans cet intervalle.
Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, l'équation $f(x) = 1$ a une racine unique β dans l'intervalle $[1;\, +\infty[$.

Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-1} près.
$f(2,2) \approx 0,9275338$ et $f(2,3) \approx 1,15119$ donc $\beta \approx 2,2$ à 10^{-1} près.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 - 2x$.
On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\, \vec{i}, \vec{j})$, ($\mathcal{P}$ est une parabole).

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$.
$f(x) - g(x) = 2xe^{-x}$ est du signe de x.

En déduire la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - g(x) = 2xe^{-x}$		$-$	0	$+$	
Positions relatives de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{P}$		$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{P}$	$\vert$	$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{P}$	

Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ se coupent en O $(0;\,0)$.

b. Déterminer la limite $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$.
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to+\infty}(2xe^{-x} = 0$.

c. Interpréter graphiquement les résultats trouvés aux questions a. et b.
Lorsque x tend vers $+\infty$ les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ deviennent de plus en plus proche l'une de l'autre, $\mathcal{C}$ étant au-dessus de $\mathcal{P}$.

5. Construire les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

6. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2. Tracer la droite D sur la figure.
une équation de la tangente D est $y - f(2) = f'(2)(x-2)$.
$f(2) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ et $f'(2) = 2(1-e^{-2}) = 2 - \frac{2}{e^2}$.
une équation de la tangente D est

$$\begin{aligned} y - f(2) &= f'(2)(x-2) \\ y &= (2-\tfrac{2}{e^2})(x-2) + \tfrac{4}{e^2} \\ y &= (2-\tfrac{2}{e^2})x - 4 + \tfrac{8}{e^2} \end{aligned}$$

7. Soit $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2(x+1)e^{-x}$.
Déterminer la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$. Que peut-on dire ?

$$\begin{aligned} F'(x) &= \tfrac{3x^2}{3} - 2x - 2e^{-x} + 2(x+1)e^{-x} \\ &= x^2 - 2x - 2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x} \\ &= x^2 - 2x + 2xe^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$F(x)$ a pour dérivée $f(x)$ (ou $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$).