Exercice 2

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une primitive de cette fonction.

Partie A

Soit la fonction g de variable réelle x définie pour $x > 0$ par : $g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x$.

1. Étudier les variations de g.

On sait que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ donc $g'(x) = -2x + \dfrac{4}{x} = \dfrac{-2x^2+4}{x} = \dfrac{2(2-x^2)}{x} = \dfrac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{x}$.

Comme $x > 0$, $g'(x)$ a même signe que $(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)$ et s'annule au point $x = \sqrt{2}$.

$g(\sqrt{2}) = -2 - 4 + 4\ln\sqrt{2} = -6 + 2\ln 2 < 0$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-2x^4$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(\sqrt{2})$	$\searrow$	

2. Déduire du tableau de variation que $g(x)$ a un signe constant. Lequel ?

Comme g est croissante sur $]0;\ \sqrt{2}]$ et $g(\sqrt{2}) < 0$, g est strictement négative sur $]0;\ \sqrt{2}]$.

Comme g est décroissante sur $[\sqrt{2};\ +\infty[$ et $g(\sqrt{2}) < 0$, g est strictement négative sur $[\sqrt{2};\ +\infty[$.

g est donc strictement négative sur $]0;\ +\infty[$.

On ne demande ni les limites aux bornes ni le tracé de la courbe.

Partie B

Soit la fonction f de la variable réelle x définie pour $x > 0$ par : $f(x) = -x + 2 - 4\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en utilisant $g(x)$.

$f(x) = -x + 2 - 4\ln x \times \dfrac{1}{x}$ (en utilisant la dérivée du produit $\ln x \times \dfrac{1}{x}$)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - 4\tfrac{1}{x}\,\tfrac{1}{x} - 4\ln x\,\tfrac{-1}{x^2} \\ &= \frac{-x^2 - 4 + 4\ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

2. Donner les variations de $f(x)$. Préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Comme $g(x) < 0$ et $x^2 > 0$ sur $]0;\ +\infty[$, on a $f'(x) > 0$ et f strictement décroissante sur $]0;\ +\infty[$.

En 0^+, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$. $\lim\limits_{x\to 0^+} -x + 2 - 4\dfrac{\ln x}{x} = +\infty$.

En $+\infty$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + 2 - 4\dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Soit la droite D, d'équation $y = -x + 2$.

a. Montrer que D est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

$f(x) = -x+2-4\dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} -4\frac{\ln x}{x} = 0$ donc la droite D, d'équation $y = -x+2$, est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.

b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et D.

$f(x)-(-x+2) = -4\dfrac{\ln x}{x}$ est du signe de $-\ln x$, donc sur $]0;\ 1]$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de D et sur $[1;\ +\infty[$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de D.
Le point d'intersection a pour coordonnées $(1;\ 1)$.

4. a. Représenter $\mathcal{C}$ et D dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.

b. Déterminer et placer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D et tracer les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

On a vu que $\mathcal{C}$ et D se coupent au point de coordonnées $(1;\ 1)$. En ce point la tangente à $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur $f'(1) = -1 - 4 = -5$.

c. Déterminer les éventuels points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à D.

Une tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à D, en un point d'abscisse x, si et seulement si $f'(x)$ est égal au coefficient directeur de D.

$$\begin{array}{ccc} f'(x) & = & -1 \\ -1-4\frac{1-\ln x}{x^2} & = & -1 \\ 1-\ln x & = & 0 \\ x & = & \mathrm{e} \end{array}$$

Ce point de $\mathcal{C}$ a pour coordonnées $(\mathrm{e};\ -\mathrm{e}+2-\frac{4}{\mathrm{e}})$.

Partie C

Soit la fonction h de variable réelle x définie pour $x > 0$ par : $h(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{x}$.

1. Étudier les variations de h.

$h'(x) = -1 + \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{4-x^2}{x^2} = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.
$h'(x)$ est du signe de $2-x$ sur $]0;\ +\infty[$. $h'(x)$ s'annule en $x = 2$.

$h(2) = -2$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}(-x+2-\frac{4}{x} = -\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.

x	0		2		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

2. Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h, montrer que la droite D est asymptote à $\mathcal{H}$.

$h(x) = -x + 2 - \dfrac{4}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -4\dfrac{1}{x} = 0$ donc la droite D d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à $\mathcal{H}$.

Déterminer l'autre asymptote.

$\lim\limits_{x \to 0}(-x + 2 - \dfrac{4}{x} = -\infty$ donc l'axe (Oy) d'équation $x = 0$ est asymptote à $\mathcal{H}$.

3. Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le même repère que $\mathcal{C}$.

4. Déterminer les éventuels points communs de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ et étudier les positions relatives de ces deux courbes.

$f(x) - h(x) = -4\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{4}{x} = -4\dfrac{\ln x - 1}{x}$.
$f(x) - h(x)$ s'annule donc en $x = \mathrm{e}$, le point commun à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ a pour coordonnées $(\mathrm{e}; -\mathrm{e} + 2 - \frac{1}{\mathrm{e}})$.
$f(x) - h(x)$ est du signe contraire de $\ln x - 1$, positif si $x < \mathrm{e}$ et négatif si $x > \mathrm{e}$.
donc pour $x < \mathrm{e}$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{H}$ et pour $x > \mathrm{e}$, $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{H}$.

Partie D

1. Dériver $(\ln x)^2$.

On sait que $u' = 2uu'$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ donc $\left((\ln x)^2\right)' = 2\ \ln x\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln x}{x}$.

2. (facultatif) En déduire une primitive sur $]0; +\infty[$ de $\dfrac{\ln x}{x}$ puis une primitive $G(x)$ de $f(x)$, c.-à-d. une fonction G telle que $G' = f$.

On déduit de $\left((\ln x)^2\right)' = \dfrac{2\ln x}{x}$ que $\dfrac{\ln x}{x}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

$f(x) = -x + 2 - 4\dfrac{\ln x}{x}$ a pour primitive
$G(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 4\dfrac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ où c est une constante
$G(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 2(\ln x)^2 + c$.