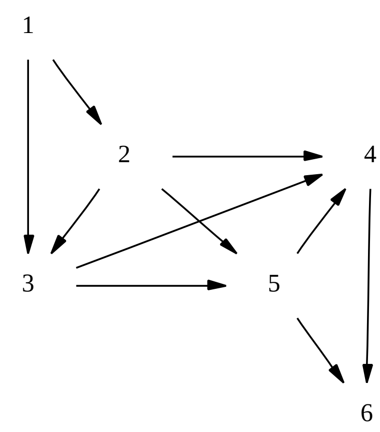
Exercice I.

On considère le graphe orienté G représenté ci-dessous.



1. a. Montrer qu'un sommet et un seul de ce graphe est une racine.

b. Déterminer les niveaux des sommets de ce graphe. Donner une nouvelle représentation géométrique du graphe qui fait apparaître les différents niveaux.
On rappelle que les racines ont pour niveau 0.

2. Écrire la matrice d'adjacence M associée à ce graphe.
On rappelle que les numéros des sommets de départ sont les rangs des lignes et les numéros des sommets d'arrivée sont les rangs des colonnes de cette matrice booléenne M.

3. Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

4. Le coefficient situé à l'intersection de la 1^{re} ligne et de la 6^{me} colonne de la matrice M^3 est égal à 4. Donner l'interprétation de ce nombre. Vérifier ce résultat en énumérant les chemins correspondants.

5. En utilisant l'un des résultats de la question 2. montrer qu'il existe un chemin hamiltonien et un seul dans ce graphe. Décrire ce chemin hamiltonien.
On rappelle qu'un chemin hamiltonien est un chemin qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

6. a. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 6, la matrice M^{n} est nulle. Donner l'interprétation de ce résultat.

b. Déterminer la matrice $\widehat{\mathrm{M}}$ de la fermeture transitive $\widehat{\mathrm{G}}$ du graphe G.

T.S.V.P.

Exercice II.

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : (L), (C) et (V).
Pour un appareil de type (L), on a besoin de 10 kg d'acier, 2 kg de peinture et 10 heures de travail.
Pour un appareil de type (C), il faut 4 kg d'acier, 1 kg de peinture et 6 heures de travail.
Pour un appareil de type (V), il faut 10 kg d'acier, 1 kg de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y et z les quantités d'appareils de type (L), (C) et (V) fabriqués, et a, p, t les quantités d'acier (en kg), de peinture (en kg) et de travail (en heures) nécessaires pour leur fabrication.

1. On considère les matrices :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 1 \\ 10 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} a \\ p \\ t \end{bmatrix}.$$

Montrer que $Y = MX$.

2. On donne la matrice :

$$\mathrm{M}' = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer le produit $M'\,M$.
En déduire la matrice X en fonction des matrices M' et Y.

3. En déduire les quantités d'appareils de chaque type (L), (C) et (V) fabriqués en un mois sachant que $4\,200$ kg d'acier, 800 kg de peinture et $5\,000$ heures de travail ont été nécessaires.

Exercice III.

La question 1. est indépendante des questions suivantes.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).
On note E le point de coordonnées $(\ln 2, \ln 2)$.

1. Soient a et b deux nombres réels ; on désigne par g la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax + b - \frac{4\,e^x}{e^x + 2}.$$

a. Calculer la dérivée de g.

b. Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point E et admette en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. On se propose d'étudier la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4\,e^x}{e^x + 2}.$$

a. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = x - 2 + \dfrac{8}{e^x + 2}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c. Montrer que les droites D_1 d'équation $y = x - 2$ et D_2 d'équation $y = x + 2$ sont asymptotes à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan P.

Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à chacune de ces deux droites D_1 et D_2.

3. a. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de f.

b. Construire dans le plan P la courbe $\mathcal{C}$, sa tangente en E et ses asymptotes.

4. a. Soit la fonction h définie pour tout nombre réel x par $h(x) = \ln(e^x + 2)$.
Calculer la dérivée h' de h.

b. Déduire du résultat précédent une primitive G de la fonction f.

c. Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie $\mathrm{F}(\ln 2) = 0$.

d. Calculer $J = \displaystyle\int_{\ln 2}^{2\,\ln 2} f(x)dx$ puis donner une valeur approchée de J à 10^{-3} près.

<u>Barème approximatif</u> Exercice I : 6 points Exercice II : 5 points Exercice III : 9 points.