Exercice I.

1. On considère un ensemble $E = \{0,\ 1\}$ muni de l'algèbre de Boole à deux éléments habituelle.

a. Soit l'expression $A = abc + a\bar{b}c + \bar{a}bc$, où a, b et c désignent trois éléments de E. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b. Montrer par le calcul que $A = ac + \bar{a}bc$ ou encore $A = ac + bc$.

c. L'expression duale de A est $B = (a + b + c)(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + c)$. Simplifier B.

2. Un immeuble comprend six logements dont les surfaces figurent dans le tableau ci-dessous :

numéro du logement	1	2	3	4	5	6
superficie en m^2	55	105	112	228	247	253

Les logements 1 et 3 appartiennent à Monsieur A, les logements 2 et 4 appartiennent à Madame B, les 5 et 6 appartiennent à Monsieur C.
Chacun détient à l'assemblée des copropriétaires un nombre de voix égal à la superficie totale de ses logements, exprimée en m^2. Ainsi, Monsieur A dispose de : $55 + 112 = 167$ voix.

Une proposition concernant le remplacement de la chaudière est mise au vote de l'assemblée. Pour être adoptée, elle doit recueillir la majorité des voix, soit 501 voix. Si A vote « pour », son vote favorable est désigné par : a. S'il vote « contre », ou s'il s'abstient, son vote est désigné par $\bar{a}$. De même pour B et C.

a. Quelle situation de vote traduit le produit booléen : $\bar{a}\bar{b}c$?

b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous pour les 8 situations de votes possibles :

Situations possibles	Nombre de voix	Proposition votée (écrire oui ou non)
abc		
$ab\bar{c}$		
$a\bar{b}c$		
$a\bar{b}\bar{c}$		
$\bar{a}bc$		
$\bar{a}b\bar{c}$		
$\bar{a}\bar{b}c$		
$\bar{a}\bar{b}\bar{c}$		

c. Écrire l'expression booléenne qui exprime la condition que la proposition soit adoptée.

d. En utilisant les résultats de la question 1. écrire cette condition sous forme simplifiée, puis la traduire par une phrase.

T.S.V.P.

Exercice II.

La direction d'une chaîne de magasins de produits informatiques a remarqué que la probabilité qu'un ordinateur vendu soit de la marque « M » est $p = 0,08$.

1. On suppose que les clients font leurs achats en toute indépendance. On prélève n dossiers de clients, pris au hasard, parmi les achats d'ordinateurs.
On appelle X la variable aléatoire mesurant le nombre de personnes qui achètent un ordinateur de la marque « M ».

   Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser les paramètres de cette loi.

2. Dans cette question on prend $n = 20$.

   a. Calculer l'espérance mathématique de X, puis l'écart-type de X.

   b. Soient A et B les événements
   A : « aucune des 20 personnes n'achète un ordinateur de la marque M »,
   B : « trois personnes au moins, parmi les 20, achètent un ordinateur de la marque M ».

   Calculer les probabilités de A et de B.

3. Dans cette question on prend $n = 50$. On décide d'approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X par une loi de Poisson $\mathcal{L}(\lambda)$.
On appelle Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

   a. Déterminer le paramètre λ de la loi de Poisson.

   b. Quelle est la probabilité $P(Y \geq 4)$?

4. Dans cette question on prend $n = 400$.
On admet que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi normale. Soit Z une variable aléatoire suivant cette loi normale.

   a. Déterminer les paramètres de la loi normale suivie par Z.

   b. Calculer les probabilités suivantes $P(Z \leq 35)$ et $P(Z \geq 40)$.

   c. Calculer une valeur approchée de $P(X = k)$ revient à calculer $P(k - 0,5 \leq Z \leq k + 0,5)$, où intervient la correction de continuité.
À l'aide de ce renseignement, calculer une valeur approchée de la probabilité $P(X = m)$ où m est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice III.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 1 + e^{\frac{-x}{2}}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).

Partie A

1. a. Montrer que $f(x) = \dfrac{-x}{2}\left(-2 - \dfrac{2}{-x} + \dfrac{e^{\frac{-x}{2}}}{\frac{-x}{2}}\right)$.
Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f. (On pourra poser $t = \frac{-x}{2}$).

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) - (x - 1)$ puis celle de $f(x)$.

c. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on déterminera une équation.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$, son asymptote et la tangente au point d'abscisse 0.

4. a. Vérifier que 0 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

b. Déterminer à 10^{-3} près les ordonnées des points de $\mathcal{C}$, d'abscisses -3 et -2. En déduire que $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-3;\ -2]$. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

Partie B

1. a. Déterminer une primitive de $f(x)$.
b. Déterminer la primitive F de f, telle que $F(0) = 0$.

2. a. Soit a un réel, exprimer en fonction de a, $I(a) = \int_0^a f(t)dt$.
b. Calculer $I(3)$.
Déterminer l'aire A, en cm^2, de la région R limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 3$.
Colorier la région R sur la figure.

c. Déterminer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Barème approximatif Exercice I : 5 points Exercice II : 7 points Exercice III : 8 points.