## Exercice I.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = -2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3. \end{cases}$$

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 6$.

3. a. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{6-u_n}{2}$.

   b. Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.

4. Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in N,\ v_n = u_n - 6.$$

   a. Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $u_{n+1}$ puis $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

   b. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme $v_0$ et la raison.

5. Déterminer la limite de $(v_n)$ et en déduire celle de $(u_n)$.

6. Exprimer $v_n$ en fonction de $n$, puis $u_n$ en fonction de $n$.

7. a. Soit $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(v_n)$. Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

   b. Soit $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)$. En utilisant le résultat précédent, exprimer $T_n$ en fonction de $n$.

T.S.V.P.

**Exercice II.**

1. a. Calculer en fonction de $n$ et sans factorielle le nombre $a = \dfrac{(n+2)!}{(n-2)!}$.

   b. Simplifier et exprimer en fonction de $n$ et sans factorielle ni nombre d'arrangements le nombre $b = \dfrac{A_{n+1}^{p}}{A_n^p}$.

2. a. Soient $n$ et $p$ deux nombres entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.
Démontrer que

$$A_{n-1}^{p} + pA_{n-1}^{p-1} = A_n^p.$$

   b. Résoudre dans l'ensemble $N$ des nombres entiers naturels l'équation

$$C_x^6 = 31\, C_x^4.$$

3. a. Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton

$$(x-2)^5.$$

   b. Quel est le coefficient de $x^6$ dans le développement de $(x+1)^{10}$ ? Dans le développement de $(x^2+1)^{10}$ ?

4. Un jeu de cartes qui à l'origine contenait 32 cartes est devenu très incomplet, il ne contient plus que des carreaux et des piques : huit carreaux et six piques exactement. Dans les piques, il manque la dame et le sept. On appelle « Personnage » un Valet, une Dame ou un Roi.

On tire une carte du jeu et on suppose que tous les tirages sont équiprobables. Soit $A$ l'événement : « la carte est un carreau » et $B$ l'événement : « la carte est un Personnage ».

   a. Déterminer, en expliquant, les probabilités suivantes :

   $p(A)$, $p(\bar{A})$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap B)$, $p(A \backslash B)$ et $p(B \backslash A)$.

*On pourra dessiner un ou plusieurs schémas qui aideront avantageusement les explications).*

   b. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

## Exercice III.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \ln 2 + \frac{4}{e^x + 1}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (unité graphique 2 cm).

A – 1. Montrer que pour tout $x$ :

$$f(x) = x + 4 + \ln 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}.$$

2. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f$.

3. Montrer que les droites $\Delta_1$ d'équation $y = x + \ln 2$ et $\Delta_2$ d'équation $y = x + 4 + \ln 2$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à chaque asymptote.

4. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de $f$.

5. Déterminer une équation de la droite $T$ tangente à $\mathcal{C}$au point $A$ de $\mathcal{C}$, d'abscisse $0$.
Construire la courbe $\mathcal{C}$, ses asymptotes $\Delta_1$, $\Delta_2$ et la tangente $T$.

B – 1. Déterminer la dérivée de $\ln(e^x + 1)$. En déduire une primitive de $[f(x) - (x + \ln 2)]$.

2. Soit $a$ un réel strictement positif, $(a \geq 0)$. Calculer en fonction de $a$ :

$$I(a) = \int_0^a [f(x) - (x + \ln 2)]dx.$$

3. Déterminer $a$ pour que $I(a) = \frac{1}{2}$.

C – 1. Montrer graphiquement que, quelle que soit la valeur du réel $m$, l'équation $f(x) = m$ a une solution et une seule.

2. Dans le cas où $m = 0$, trouver une valeur approchée à $10^{-1}$ près par défaut de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

<u>Barème approximatif</u> Exercice I : 5 points Exercice II : 6 points Exercice III : 9 points.