Exercice I.

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur décimale arrondie à 10^{-2} près mais les calculs devront être effectués avec la meilleure précision possible.

Pour mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, le directeur d'une agence bancaire réalise une étude relative à la durée de traitement des dossiers.

Un échantillon aléatoire de 40 dossiers traités a donné :

Durée en minutes x_i	$[0;\ 20[$	$[20;\ 30[$	$[30;\ 40[$	$[40;\ 60[$	$[60;\ 90[$
Nombre n_i	4	10	14	6	6

1. a. Dessiner l'histogramme de la série statistique. Indiquer la classe modale de la série.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart type σ des durées de traitement des dossiers de cet échantillon.

2. a. Indiquer dans un tableau les effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants. Dessiner sur une même figure les polygones des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.

   b. Déterminer graphiquement la médiane m de la série statistique, expliquer la méthode et effectuer les constructions nécessaires sur la figure.

   c. Déterminer par le calcul la médiane m de la série statistique, (détailler suffisamment les calculs pour que la méthode utilisée soit compréhensible, il ne s'agit pas de donner seulement la valeur de la médiane).

Exercice II.

Dans cet exercice, tous les résultats numériques seront donnés par leur valeur approchée à 10^{-3} près.
Le coût annuel de maintenance d'un équipement informatique varie avec l'âge t des appareils.
Le tableau suivant indique, pour un même type d'équipement, ce coût y en fonction de t.
Dans ce tableau la troisième ligne correspond au logarithme népérien $z = \ln y$ du coût.

Âge t_i en années	1	2	3	4	5	6
Coût y_i en kF	14	$15,5$	18	20	$23,3$	28
$z_i = \ln y_i$	$\ln 14$	$\ln 15,5$	$\ln 18$	$\ln 20$	$\ln 23,3$	$\ln 28$

1. a. Représenter le nuage de points $M_i\ (t_i;\ z_i)$ dans un repère orthogonal du plan.

   b. Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ? Expliquer.

   c. Quelles sont les coordonnées $(t_G;\ z_G)$ du point moyen G de ce nuage ? Placer le point G sur la figure.

2. Déterminer, pour la série statistique double des deux variables $(t;\ z)$,

   a. le coefficient de corrélation linéaire r,

b. une équation $z = at + b$ de la droite de régression linéaire D de z en t, par la méthode des moindres carrés.

3. a. Les résultats obtenus à la question 2. confirment-t-ils l'observation faite à la question 1. b. ?

b. Tracer la droite D sur la figure. Que peut-on observer pour D et le point G ?

4. a. Déduire de la réponse à la question 2. b. une expression du coût y en fonction de l'âge t.

b. Montrer que le coût y peut s'exprimer en fonction de l'âge t par une relation de la forme $y = k \times \alpha^t$, calculer k et α.

c. En admettant que l'évolution constatée du coût pendant ces six années puisse être utilisée pour prévoir le coût de la maintenance les années suivantes, indiquer les valeurs à envisager pour $t = 7$ et $t = 8$.

Exercice III.

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2x - 4.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Soit $g(x) = e^x \left(\frac{3}{2}e^x - 1\right)$.

a. Montrer que $g(x)$ s'annule pour $x = \ln \frac{2}{3}$ et que $\ln \frac{2}{3}$ est sa seule racine.

b. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que $f(x) - (-2x - 4) = g(x)$. En déduire que la droite D d'équation $y = -2x - 4$ est asymptote à C. Étudier la position de C par rapport à D.

3. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (3e^x + 2)(e^x - 1)$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$. Dresser le tableau de variations de f.

Partie B

1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions et deux seulement, l'une x_0 dans l'intervalle $]-\infty; 0]$, l'autre x_1 dans l'intervalle $]0; +\infty[$. En utilisant la calculatrice donner des encadrements d'amplitude 10^{-1} des deux racines x_0 et x_1.

2. a. Résoudre l'équation $3e^{2x} - e^x - 2 = 2$ en posant $X = e^x$.

b. En déduire qu'il existe un point unique A de la courbe C où la tangente a pour coefficient directeur 2 et que l'abscisse de A est $\ln \frac{4}{3}$.

c. Tracer la droite D, la courbe C et la tangente en A à la courbe C.

Partie C

1. Déterminer une primitive $F(x)$ de $f(x)$.

2. a. Soit I l'aire en cm^2 de la partie S du plan définie par

$$M\,(x;\,y) \in S \iff \begin{cases} x_0 & \leq & x & \leq & x_1 \\ f(x) & \leq & y & \leq & 0 \end{cases}$$

Colorier ou hachurer la région S sur la figure.

b. Expliquer $I = -8 \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$.

c. Calculer une valeur approchée de I.

<u>Barème approximatif</u> Exercice I : 4 points Exercice II : 6 points Exercice III : 10 points.