Exercice I.

Les questions 1. et 2. de l'exercice sont indépendantes.

L'ensemble E est muni d'une algèbre de Boole, on désigne par $\bar{a}$ le complément de a, par $a+b$ et ab la somme et le produit de a et de b.

1. Soit la fonction booléenne A des trois variables a, b, c :

$$A = (a+\overline{b})\,(a+\overline{c})\,(\overline{b}+c).$$

a. Développer et transformer algébriquement A en une somme de produits. Montrer que $A = a\,\overline{b} + a\,c + \overline{b}\,\overline{c}$.

b. Simplifier A à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

c. Simplifier A algébriquement.

d. Montrer que $A = \overline{(b+c)(\overline{a}+\overline{c})}$.

2. a. Soit la fonction booléenne B des trois variables a, b, c :

$$B = \overline{a}\,b\,c + a\,b\,\overline{c} + a\,b\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$$

Simplifier B à l'aide d'un tableau de Karnaugh.

b. Montrer directement ce résultat par un calcul algébrique.

c. Montrer que $\overline{B} = a\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\,\overline{c}$.

Exercice II.

Cet exercice a pour but de calculer une valeur approchée d'une intégrale.

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel t strictement supérieur à -1, par :

$$f(t) = \ln(t+1) + e^{-t}$$

($\ln$ désigne la fonction logarithme népérien).

A. Étude de la fonction f.

1. a. Montrer que $f'(t) = \dfrac{e^t - (t+1)}{(t+1)\,e^t}$.

b. On admettra que pour tout réel t on a $e^t \geq t+1$. Étudier les variations de f.

La courbe représentative (C) de f dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est dessinée sur la figure ci-jointe (à compléter), les unités sont de 2 cm et 5 cm sur les deux axes.

2. a. Calculer la dérivée f'' de f'.

b. Montrer que $f''(x) = 0$ si et seulement si $(x+1)^2 - e^x = 0$.

On admettra que l'équation $f''(0) = 0$ a une solution que l'on appellera α, comprise entre $2,51$ et $2,52$. Placer le point $A\ (\alpha, f(\alpha))$ de la courbe (C) sur la figure.

B. Calcul d'une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^\alpha f(t)dt$.

1. Pour tout nombre réel a positif ou nul, on pose : $F(a) = \int_0^a f(t)dt$. a. Expliquer $F(a) = \int_0^a \ln(t+1)dt + \int_0^a e^{-t}dt$.
b. Calculer la dérivée de $(t+1)\ln(t+1) - t$ et en déduire $F(a)$ en fonction de a.

2. a. Expliquer, sans calculer l'intégrale, que $F(\alpha) \geq \alpha$.
b. Démontrer, sans calculer, que $F(2,51) < F(\alpha) < F(2,52)$.
c. En déduire, par le calcul, une valeur décimale approchée de $F(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3. Soit S la région du plan délimitée par les deux axes (Ot) et (Oy), par la courbe (C) et par la droite D d'équation $t = \alpha$. Hachurer la région S sur la figure.
Calculer une valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la région S.

Exercice III.

Partie A — Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur **R** par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

1. Montrer que la fonction f est impaire. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

2. Montrer que pour tout $x \in I\!R$, $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

Partie B — Tracé de la courbe.

1. a. Calculer la limite de f en $+\infty$.
b. En déduire la limite de f en $-\infty$.
c. En déduire aussi les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. Montrer que la dérivée f' de f peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$. b. En déduire le sens de variation de f sur $I\!R$ et tracer le tableau de variations.

3. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.

Partie C — On se propose de déterminer en cm^2, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie S du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $y = 1$, $x = 0$, $x = \alpha$ où α est un nombre réel strictement positif. Représenter la région S sur la figure.

1. Montrer que pour tout $x \in I\!R$, $f(x) < 1$.

2. a. On pose $u(x) = e^x + e^{-x}$. Montrer que $\forall x \in I\!R$, $f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$. b. En déduire une primitive de f sur $I\!R$.
c. Exprimer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α, d'abord sous la forme d'une intégrale, ensuite en calculant cette intégrale.

3. a. Déterminer la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

b. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de cette limite.

4.. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathcal{A}(4)$.

Barème approximatif Exercice I : 5 points Exercice II : 6 points Exercice III : 9 points.

Indiquer vos Nom Prénom :

Feuille à joindre à la copie.

Compléter la figure de l'exercice II :