Exercice I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes. (Indiquer l'ensemble des solutions).

1. a. $\ln(x^2+3) = \ln(4) + \ln(x)$

   b. $\ln\left((2x+3)^2\right) = -4$

   c. $2\left(\ln(x+1)\right)^2 + \ln(x+1) = 6$

   d. $\ln(-3x^2+e^2+4) \leq 2$

   e. Étudier le signe de l'expression x^2+x-2. Résoudre ensuite $\ln(2-x)+\ln(x+3) \leq 2\ln 2$

2. a. $\dfrac{e^{2x}+e^x-2}{e^{2x-1}} = 0.$

   b. $2e^{2x+4} - 5e^{x+2} > -3$

   c. $6e^{-x} + e^x \leq 5$

Exercice II.

1. À l'aide des théorèmes sur les limites, déterminer les limites demandées.
   a. Soit $f(x) = 2xe^x - e^{-x+2}$

déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.

   b. Soit $f(x) = \dfrac{2e^x - x}{x^2+1}$,

Montrer que $f(x) = \dfrac{2e^x}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$ et $f(x) = \dfrac{2e^x}{x^2}\dfrac{x^2}{x^2+1} - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de $f(x)$.

2. Déterminer les dérivées et étudier leur signe. Tracer le tableau de variations. (On ne demande pas d'étudier les limites mais on peut les indiquer dans les tableaux).

   a. $f(x) = 3e^x + e^{-x} - 4x + 1.$

   b. $f(x) = (x^2-2)e^{2x} + 2.$

Problème

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\, \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 2 cm sur chaque axe.

l. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = xe^{-x}(xe^x - 2e^x + 2)$.

c. Étudier la limite de f en $-\infty$, on pourra utiliser l'expression obtenue à la question b. précédente.

2. a. Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = 2(x-1)(1-e^{-x}).$$

b. Étudier les variations de la fonction f.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet pour solution $x = 0$.

b. Montrer que cette équation $f(x) = 0$ admet une deuxième solution α dans l'intervalle $[1;\, +\infty[$. Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique β. Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-1} près.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 - 2x$$

On appelle $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans le repère $(O;\, \vec{i}, \vec{j})$, ($\mathcal{P}$ est une parabole).

a. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$. En déduire la position relative des deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

b. Déterminer la limite

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)).$$

c. Interpréter graphiquement les résultats trouvés aux questions a. et b.

5. Construire les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.

6. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2. Tracer la droite D sur la figure.

7. Soit

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2(x+1)e^{-x}.$$

Déterminer la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$. Que peut-on dire ?

Barème approximatif   Exercice 1 : 5 points   Exercice 2 : 4 points   Exercice 3 : 11 points.