Exercice 1.

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une primitive de cette fonction.

l. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -1 + (1 - x)e^{-x}.$$

a. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$.
b. Déterminer que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction g. On précisera la valeur de $g(0)$.
d. Démontrer que pour tout x de $[0; +\infty[$, $g(x) \leq 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x} - x + 4.$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$. Unité : 2 cm sur chaque axe.

a. Vérifier que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$; préciser la limite en $+\infty$.
c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à $\mathcal{C}$. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
d. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et préciser la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$h(x) = -\frac{x}{2} + 4.$$

Tracer sa représentation graphique D dans le même repère que $\mathcal{C}$.
b. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.
c. Étudier le signe de $f(x) - h(x)$ sur $[0; +\infty[$ et en déduire la position relative de $\mathcal{C}$ et D.

4. a. Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Calculer $G'(x)$.
b. (facultatif) En déduire une primitive F sur $[0; +\infty[$ de la fonction f, c.-à-d. une fonction F telle que $F' = f$.

Exercice 2

Le but de ce problème est l'étude d'une fonction, le tracé de sa représentation graphique et le calcul d'une primitive de cette fonction.

Partie A

Soit la fonction g de variable réelle x définie pour $x > 0$ par :

$$g(x) = -x^2 - 4 + 4\ln x.$$

1. Étudier les variations de g.

2. Déduire du tableau de variation que $g(x)$ a un signe constant. Lequel ?
On ne demande ni les limites aux bornes ni le tracé de la courbe.

Partie B

Soit la fonction f de la variable réelle x définie pour $x > 0$ par :

$$f(x) = -x + 2 - 4\frac{\ln x}{x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en utilisant $g(x)$.

2. Donner les variations de $f(x)$. Préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

3. Soit la droite D, d'équation $y = -x + 2$.
   a. Montrer que D est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.
   b. Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et D.

4. a. Représenter $\mathcal{C}$ et D dans un même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra comme unité 2 cm sur l'axe des abscisses, 1 cm sur l'axe des ordonnées.
   b. Déterminer et placer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D et tracer les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.
   c. Déterminer les éventuels points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à D.

Partie C

Soit la fonction h de variable réelle x définie pour $x > 0$ par :

$$h(x) = -x + 2 - \frac{4}{x}.$$

1. Étudier les variations de h.

2. Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h, montrer que la droite D est asymptote à $\mathcal{H}$. Déterminer l'autre asymptote.

3. Tracer la courbe $\mathcal{H}$ dans le même repère que $\mathcal{C}$.

4. Déterminer les éventuels points communs de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ et étudier les positions relatives de ces deux courbes.

Partie D

1. Dériver $(\ln x)^2$.

2. (facultatif) En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de $\frac{\ln x}{x}$ puis une primitive $G(x)$ de $f(x)$, c.-à-d. une fonction G telle que $G' = f$.

Barème approximatif   Exercice 1 : 9 points   Exercice 2 : 11 points.