BTS « blanc » n°2 Informatique/Gestion : corrigé.

Exercice I :

1. *a*) $\begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 & 1,5 \\ 2 & 2 & 1,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 26,5 \\ 14 \end{pmatrix}$. Monsieur $\mathscr{M}$ devrait payer $\begin{cases} 3700€ \text{ en période haute,} \\ 2650€ \text{ en période moyenne,} \\ 1400€ \text{ en période basse.} \end{cases}$

   b) Il ne peut voyager qu'en période basse, puisque son budget est inférieur à 2650€.

2. *a*) $Q \times P = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4,5 \\ 1 & -2 & 1,5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2,5 & 3,5 & 1,5 \\ 2 & 2 & 1,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

   b) Si $P \times X = Y$, alors $Q \times P \times X = Q \times Y$, donc $I \times X = Q \times Y$, d'où $X = Q \times Y$.

3. On a alors $Y = \begin{pmatrix} 26 \\ 22,5 \\ 14 \end{pmatrix}$ et on cherche $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Y = P \times X$.

   On sait d'après le 2. *b*),que $X = Q \times Y = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4,5 \\ 1 & -2 & 1,5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 26 \\ 22,5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$.

   On aura donc 1 jour dans la ville A, 2 jours dans la ville B et 11 jours dans la ville C.

Exercice II : Partie A

1. $p(X \leq 40) = p(\frac{X-42}{3} \leq -\frac{2}{3}) = \pi(-\frac{2}{3}) = 1 - \pi(\frac{2}{3}) = 1 - \pi(0,67 = 1 - 0,75 = 0,25$.
2. $p(X > 45) = p(\frac{X-42}{3} > 1) = 1 - \pi(1) = 1 - 0,84 = 0,16$.
3. $p(42 - t \leq X \leq 42 + t) = p(-\frac{t}{3} \leq t \leq \frac{t}{3}) = \pi(\frac{t}{3}) - \pi(-\frac{t}{3}) = \pi(\frac{t}{3}) - \left(1 - \pi(\frac{t}{3})\right) = 2\pi(\frac{t}{3}) - 1$.

$$2\pi(\tfrac{t}{3}) - 1 = 0,8 \Leftrightarrow \pi(\tfrac{t}{3}) = 0,9 = \pi(1,28)$$

Donc $t = 3 \times 1,28 = 3,84$.

L'intervalle demandé est donc [42 – 3,84 ; 42 + 3,84] = [38,16 ; 45,84], soit un temps compris entre 38 minutes, 9 secondes environ et 45 minutes, 50 secondes environ.

Partie B

1. $p(C) = p(Y = 4) = 0,057$ (lecture directe dans la table).
   $p(D) = p(Y < 6) = 0 + 0,003 + 0,011 + 0,029 + 0,057 + 0,092 = 0,192$.
   $p(E) = p(Y \geq 15) = 0,009 + 0,005 + 0,002 + 0,001 + 0 = 0,17$.

2. Ce nombre est $E(Y) = \lambda = 8$

Partie C

1. *cf.* la partie A : la probabilité de réussite est de 0,25, donc celle de l'échec de 0,75 sur chaque tirage. On répète 20 fois l'expérience dans les mêmes conditions (c'est-à-dire « avec remise ») donc indépendamment : La loi suivie est une loi binomiale, de paramètres 20 et 0,25.

2. *a*) $p(Z = 2) = C_{20}^{2}(0{,}25)^2(0{,}75)^{18} = 0{,}07$.

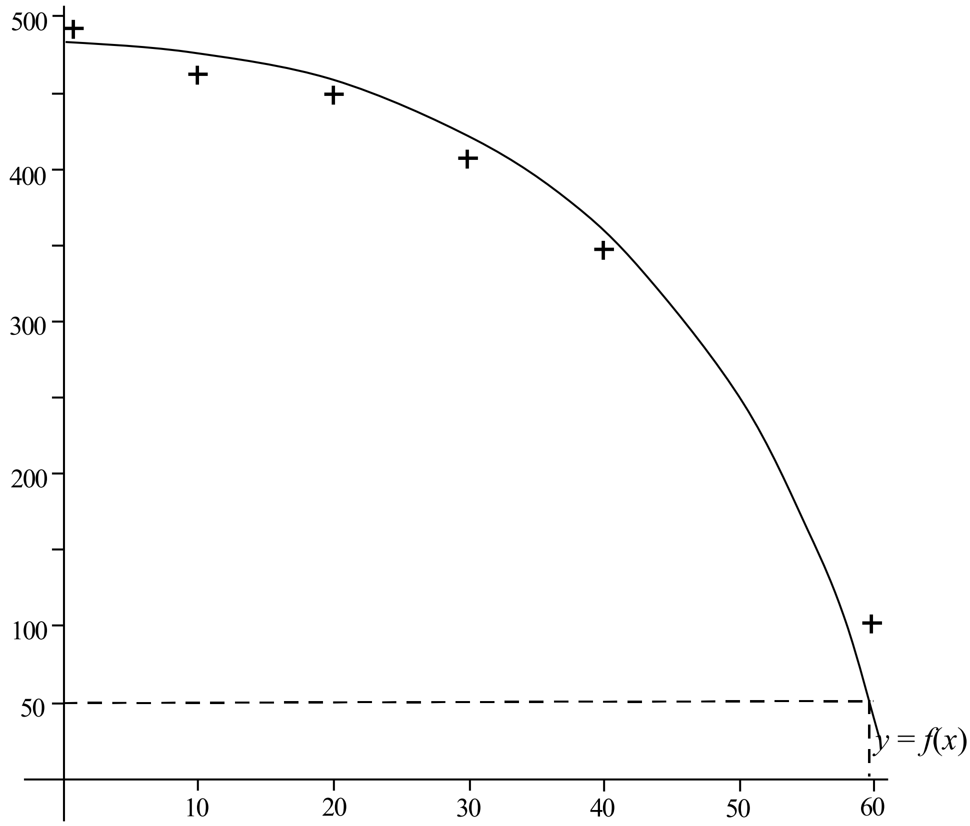
b) $p(Z \geq 3) = 1 - p(Z \leq 2) = 1 - \left(C_{20}^{0}(0{,}25)^0(0{,}75)^{20} + C_{20}^{1}(0{,}25)^1(0{,}75)^{19} + C_{20}^{2}(0{,}25)^2(0{,}75)^{18}\right) = 0{,}91$.

3. C'est l'espérance de Z : $E(Z) = n \times p = 0{,}25 \times 20 = 5.$

Exercice III :

Partie A – Étude statistique.

1.



2. *a*)

temps t_i	1	10	20	30	40	60
$z_i = \ln(500 - y_i)$	2,079	3,611	3,912	4,543	5,030	5,989

b) La calculette donne $r = 0{,}967$ à 10^{-3} près, très proche de 1, donc l'ajustement est justifié.

x

3. On obtient à la calculette : $z = 0{,}06t + 2{,}57$. On a donc $\ln(500 - y) = 0{,}06t + 2{,}57$,

d'où $500 - y = e^{0{,}06t + 2{,}57}$,

puis $y = 500 - e^{0{,}06t} \times e^{2{,}57}$, soit approximativement $500 - 13 \times e^{0{,}06t}$.

4. Pour $t = 50$, on obtient $y = 238{,}88\ldots$ soit 239 litres à 1 litre près.

Partie B – Étude statistique d'une fonction.

1. $f'(t) = (500 - 13 \times e^{0,06t})' = -13 \times 0,06 \times e^{0,06t} = -0,78 \times e^{0,06t} < 0$, car $\forall\, t > 0, e^{0,06t} > 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur [0 ; 60].
2. $f(t) = 50 \Leftrightarrow 13e^{0,06t} = 450$, d'où $t = \frac{1}{0,06}\ln(\frac{450}{13}) = 59,0716...$: le dernier jour d'utilisation est donc le 59[e] jour.
3. Voir la courbe.
4. En traçant la droite horizontale dont l'équation est ($y = 2$), on obtient la solution $x = 59$.

Partie C – Étude d'une suite.

1. $f(0) = 500 - 13e^{0,06 \times 0} = 500 - 13 = 487.$

$f(1) = 500 - 13e^{0,06 \times 1} \approx 486,196.$

$$u_1 = f(0) - f(1) = 487 - 500 + 13e^{0,06} = 13e^{0,06} - 13 = 13 \times (e^{0,06} - 1).$$

2. $$u_n = f(n-1) - f(n) = 500 - 13e^{0,06(n-1)} - \left(500 - 13e^{0,06n}\right)$$
$$= 13\left(e^{0,06n} - e^{0,06(n-1)}\right)$$
$$= 13\left(e^{0,06n} - e^{0,06n} \times e^{-0,06}\right) = 13e^{0,06n}(1 - e^{-0,06}).$$

3. $\forall\, n \geq 1,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{13e^{0,06(n+1)}(1 - e^{-0,06})}{13e^{0,06n}(1 - e^{-0,06})} = \dfrac{e^{0,06(n+1)}}{e^{0,06n}} = e^{0,06(n+1) - 0,06n} = e^{0,06}$, qui est une constante,

donc la suite (u_n) est géométrique et sa raison est $q = e^{0,06} \approx 1,06$.

Enfin, comme $u_{n+1} = 1,06 \times u_n$, la consommation augmente de 6% chaque jour.