Lycée « Le Castel » Mardi 16 janvier 2006

BTS « blanc » n°2 Informatique/Gestion

Exercice I : 4 points.

Une agence de voyages propose un circuit touristique pour visiter 3 villes A, B et C. Le client peut choisir la durée de séjour dans chacune des villes.
L'agence propose des tarifs qui diffèrent selon la période. Il existe 3 périodes touristiques :

- une période haute (tarifs plus élevés)
- une période moyenne
- une période basse.

Les prix journaliers, en centaines d'euros par personne, dans les différents lieux sont donnés dans le tableau suivant :

	Ville A	Ville B	Ville C
Période haute	2,5	3,5	1,5
Période moyenne	2	2	1,5
Période basse	1	1	1

On appelle P la matrice $\begin{pmatrix} 2{,}5 & 3{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui représente les prix journaliers par ville et par période.

1. Monsieur $\mathscr{M}$ choisit un circuit de 14 jours qui comprend 6 jours dans la ville A, 5 jours dans la ville B et 3 jours dans la ville C. On associe à ce choix la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer le produit matriciel $P \times M$. Que représentent les termes de la matrice obtenue ?
   b) Monsieur $\mathscr{M}$ dispose d'un budget de 2600 euros. A quelle période pourra-t-il faire son voyage ?

2. On donne la matrice $Q = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -4{,}5 \\ 1 & -2 & 1{,}5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et la matrice unité $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit matriciel $Q \times P$.

b) Montrer que pour toutes les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, si $P \times X = Y$, alors $X = Q \times Y$.

3. Dans une publicité ; l'agence de voyage affirme qu'un circuit complet de 14 jours est possible au prix de 2600 euros en période haute, 2250 euros en période moyenne et 1400 euros en période basse.

   Comment se compose ce voyage ?

EXERCICE II. 6 points.

Partie A

On donnera des valeurs approchées des probabilités arrondies à 10^{-2} près si besoin.

On s'intéresse aux résultats chronométriques d'une épreuve de course à pied d'une distance de 10 kilomètres comportant un grand nombre de participants.

Soit X la variable aléatoire associant à chaque coureur la durée pour parcourir les 10 kilomètres.
On suppose que X suit une loi normale d'espérance mathématique 42 minutes et d'écart-type 3 minutes.

1. Montrer que la probabilité pour que le coureur mette moins de 40 minutes est égale à 0,25.
2. Calculer la probabilité : $P(X > 45)$.
3. Déterminer à 10^{-2} près le réel positif t tel que $P(42 - t \leq X \leq 42 + t) = 0,80$.
   En déduire l'intervalle de centre 42 regroupant 80% des performances réalisées.

Partie B

On donnera des valeurs approchées des probabilités arrondies à 10^{-3} près si besoin.

Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'arrivées par intervalle de 10 minutes.
On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre 8.
On choisit au hasard une période de 10 minutes.

1. Déterminer la probabilité des événements suivants :
   - C ; il y a exactement 4 arrivées au cours de la période.
   - D : il y a strictement moins de 6 arrivées au cours de la période.
   - E : il y a au moins 15 arrivées au cours de la période.

2. Déterminer le nombre moyen d'arrivées par intervalle de 10 minutes.

Partie C

On donnera des valeurs approchées des probabilités arrondies à 10^{-2} près si besoin.

Cette épreuve est qualificative pour un championnat.
Pour être qualifié un coureur doit réaliser moins de 40 minutes.
On extrait au hasard un groupe de 20 coureurs, on suppose le nombre de coureurs suffisamment grand pour pouvoir assimiler ce groupe à un tirage avec remise.
Soit Z la variable aléatoire donnant le nombre de coureurs qualifiés par groupe de 20.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ? Préciser ses paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait :
   a) exactement 2 coureurs qualifiés ?
   b) au moins 3 coureurs qualifiés ?

3. Déterminer le nombre moyen de qualifiés par groupe de 20.

EXERCICE III. 8 points.

Dans une entreprise, la fabrication de moules pour des pièces en fonte nécessite l'usage d'un produit amalgamant hautement volatile stocké dans des dispositifs spéciaux qui doivent impérativement être réapprovisionnés avant que le liquide n'atteigne un certain niveau.

Partie A – Étude statistique.

Pour cette partie, dans les questions 2 et 3, on utilisera les fonctions de la calculatrice. Le détail des calculs n'est pas demandé.

Dans le tableau suivant figure une partie des résultats d'une étude réalisée pour déterminer le stock y de produit (en litres), en fonction du temps, exprimé en jours écoulés depuis le réapprovisionnement (la mesure étant effectuée en fin de journée.)

temps t_i	1	10	20	30	40	60
quantité de produit y_i	492	463	450	406	347	101

1. Construire le nuage de points $M_i\,(t_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ [unités graphiques : 1 cm pour 5 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 litres sur l'axe des ordonnées.]

2. On effectue le changement de variable $z = \ln(500 - y)$

a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, les valeurs de z_i seront arrondies au millième.

temps t_i	1	10	20	30	40	60
$z_i = \ln(500 - y_i)$						

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique $(t_i\,;\,z_i)$. Justifier que le résultat obtenu permet d'envisager un ajustement affine.

3. Donner par la méthode des moindres carrés une équation de la droite de régression de z en t, sous la forme $z = at + b$, a et b seront arrondis au centième.
En déduire qu'une approximation de y en fonction de t peut être donnée par $y = 500 - 13\,e^{0,06t}$.

4. Quelle estimation peut-on donner du stock de produit à la fin du 50^e jour, à 1 litre près ?

Partie B – Étude statistique d'une fonction.

La quantité $f(t)$, exprimée en litres, de produit restant en stock s'exprime en fonction du temps par

$$f(t) = 500 - 13e^{0,06t}$$

On note Cf la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ déjà utilisé.

Tournez S.V.P.

1. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 60]

2. Résoudre l'équation $f(t) = 50$.
Il doit toujours y avoir au moins 50 litres dans la cuve, déterminer le dernier jour d'utilisation.

3. Tracer la courbe Cf dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour les abscisses comprises entre 0 et 60.

4. Par lecture graphique, retrouver le résultat de la question 2 ; on fera apparaître les tracés permettant cette lecture.

Partie C – Étude d'une suite.

On examine l'évolution de la consommation journalière de ce produit. Pour cela, on considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel non nul n par $u_n = f(n-1) - f(n)$.

Ainsi, u_n représente la consommation durant le n-ième jour.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et vérifier que la consommation durant le premier jour est $u_1 = 13(\mathrm{e}^{0,06} - 1)$.

2. Montrer que u_n peut s'écrire $u_n = 13(1 - \mathrm{e}^{-0,06}) \times \mathrm{e}^{0,06n}$.

3. Prouver que la suite (u_n) est une suite géométrique dont la raison q a pour valeur approchée 1,06.
Comparer, en termes de pourcentages, les consommations de deux jours consécutifs.