Chapitre 1

Généralités sur les Fonctions Réelles

1.1 Limites

Dans ce chapitre on rappellera brièvement quelques résultats sur les limites.

1.1.1 Fonctions de référence

Limites à l'infini

Puissances d'exposants positifs n est un entier strictement positif, ($n > 0$).
Si n est pair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
Si n est impair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Puissances d'exposants négatifs n est un entier strictement positif, ($n > 0$).
$\lim_{x\to-\infty} x^{-n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.
$\lim_{x\to+\infty} x^{-n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Racine carrée $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Logarithme népérien $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Pour $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

Exponentielle népérienne

en $-\infty$
$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.
$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
Pour $n > 0$, $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

en $+\infty$
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
Pour $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Limites en 0

Puissances d'exposants négatifs n est un entier strictement positif, ($n > 0$).
Si n est pair, alors $\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$.
Si n est impair, alors $\lim_{x\to 0^-} x^{-n} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} x^{-n} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

Logarithme népérien $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$.
Pour $n > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0^-$.

1.1.2 Indéterminations

Les cas suivants sont indéterminés
$+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.
On modifiera la forme de $f(x)$ pour lever l'indétermination

1.1.3 Opérations sur les limites

Ce sont les limites de sommes, de produits ou de quotients.
(Ne pas oublier de tenir compte des cas indéterminés).

1.1.4 Fonctions composées

Sous certaines conditions portant sur les ensembles de définition des fonctions, on a
Si $\lim_{x\to a} g(x) = b$ et $\lim_{t\to b} f(t) = c$,
alors $\lim_{x\to a} f(g(x)) = c$.
où a, b, c représentent des réels ou $-\infty$, $+\infty$.

1.2 Continuité

1.2.1 Continuité en un point

Exemples de fonctions

La fonction partie entière : C'est la fonction qui, à tout réel x fait correspondre le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $x \mapsto E(x)$.
$E(2) = 2$, $E(2,32) = 2$, $E(-2) = -2$, $E(-2,128) = -x3a2$, $E(-1,75) = -2$ etc.

Cette fonction n'est pas continue aux points x entiers, (elle est discontinue aux points entiers).
Quel que soit l'entier n les deux limites $\lim_{x\to n^-} E(x) = n - 1$ et $\lim_{x\to n^+} E(x) = n$ sont différentes.
Continuité au point x_0 La fonction f définie sur l'intervalle réel $I =]a;\ b[$ est continue au point x_0 de I si ses limites à gauches et à droite au point $x0$ existent et sont égales à $f(x_0)$.
(Si $I = [a;\ b]$ et si $x_0 = a$, on n'étudiera que la limite à droite en a de la fonction f ...).

1.2.2 Continuité sur un intervalle réel

Fonction continue sur I

La fonction f définie sur l'intervalle réel $I \subset R$ est continue sur I si elle est continue en chaque point de I.

Exemples

Les fonctions polynomes sont continues sur R.
Les fonctions rationnelles sont continues sur chacun des intervalles de leur ensemble de définition.
La fonction logarithme népérien est continue sur $]0;\ +\infty[$.
La fonction exponentielle népérienne est continue sur R.

1.2.3 Prolongement par continuité

Définition

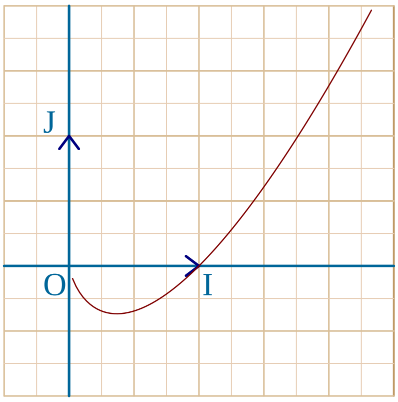
Soit l'intervalle I, le point $x_0 \in I$, la fonction f définie sur $I_{\{}x_0\}$ telle que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est égale à l, alors la fonction g, définie sur I égale à f en tout point de $I_{\{}x_0\}$ et telle que $g(x_0) = l$, prolonge par continuité la fonction f au point x_0.
Dit un peu plus plus simplement : On a une fonction f sur tout un intervalle sauf en un point x_0 de celui ci. Cette fonction a une limite en x_0, cette limite sera la valeur de g en x_0, partout ailleurs, sur I, f et g sont identiques.

Exemples

a) La fonction $f : x \mapsto f(x) = x^\pi = e^{\pi \ln x}$ est définie sur $]0; +\infty[$, mais $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, donc on peut définir la fonction g par

$$\begin{cases} g(0) = 0, \\ x > 0, \;\; g(x) = x^\pi = e^{\pi \ln x} \end{cases}$$

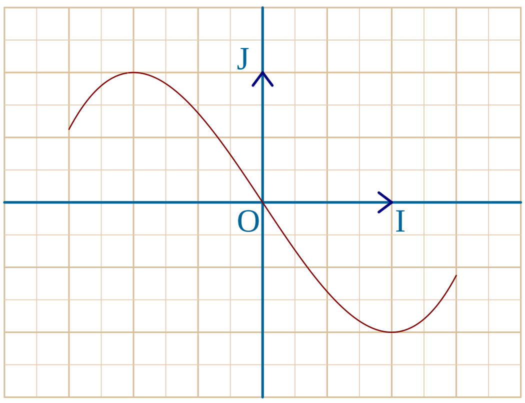
La fonction g prolonge par continuité la fonction f au point 0.
b) La fonction $f : x \mapsto f(x) = 3 + x \ln x$ est définie sur $]0; +\infty[$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = 3$, on peut donc la prolonger par continuité au point 0.



1.2.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

Image d'un segment réel par une fonction continue

L'image d'un segment réel $I = [a;\ b]$ par une fonction f, définie et continue sur I est un segment réel $J = [\alpha;\ \beta]$.
L'équation $f(x) = m$ où $m \in J$ admet une solution unique dans I.
exemple :
soit la fonction $f :\ x \mapsto f(x) = \frac{x^3 - 3x}{2}$ définie et continue sur l'intervalle $I = [-1,5;\ 1,5]$.



L'image de l'intervalle I est l'intervalle $J = [-1;\ 1]$.

Image d'un intervalle par une fonction continue strictement monotone

L'image d'un intervalle I par une fonction f, définie, continue et **strictement monotone** sur I est un intervalle J.
Soit f strictement croissante :
— Si $I = [a;\ b]$, on a $J = [f(a);\ f(b)]$,
— Si $I =]a;\ b]$ et $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, on a $J =]\alpha;\ f(b)]$ etc.
Si f est strictement décroissante, penser que $f(b) < f(a) \ldots$
<u>fonction bijective ou bijection</u>
Soit $f :\ E \to F$, on dit que la fonction f est
— injective si pour tout $a \in E,\ b \in E,\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b,$
— surjective si pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$,
— bijective si f est à la fois injective et surjective, (f est alors une bijection de E sur F).
<u>bijection réciproque</u>
si $f :\ E \longrightarrow F$ est une bijection de E sur F, on peut définir une bijection notée f^{-1}, appelée bijection réciproque de f, qui est la fonction $f^{-1} :\ F \longrightarrow E$, définie par $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$.
<u>Propriété.</u>
Si f est une fonction définie, continue et strictement monotone sur $I = [a;\ b]$, elle définit une bijection de I vers $J = [f(a);\ f(b)]$ ou $J = [f(b);\ f(a)]$ (suivant qu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante).
Dans le cas où l'intervalle est ouvert en a ou en b on fera intervenir les limites de f en a ou en b pour obtenir des propriétés analogues.
Exemples :
— les fonctions $\exp$ et $\ln$.
— la fonction $[0; +\infty[\to [0; +\infty[,\ \ x \mapsto x^2$ et la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.
— la fonction $[0; +\infty[\to [0; +\infty[,\ \ x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est sa propre réciproque.
— la fonction affine $f :\ R \to R,\ \ x \mapsto ax + b, a \neq 0$ et $f^{-1}t \mapsto \frac{t-b}{a}$.
<u>Propriété.</u>
Si la fonction f est une bijection de I vers J et est continue sur I, alors sa fonction réciproque f^{-1} qui est définie sur J, est continue sur J.
Par exemple : On a défini la fonction exponentielle comme réciproque de la fonction continue $\ln$, la fonction $\exp$ est donc continue sur R.

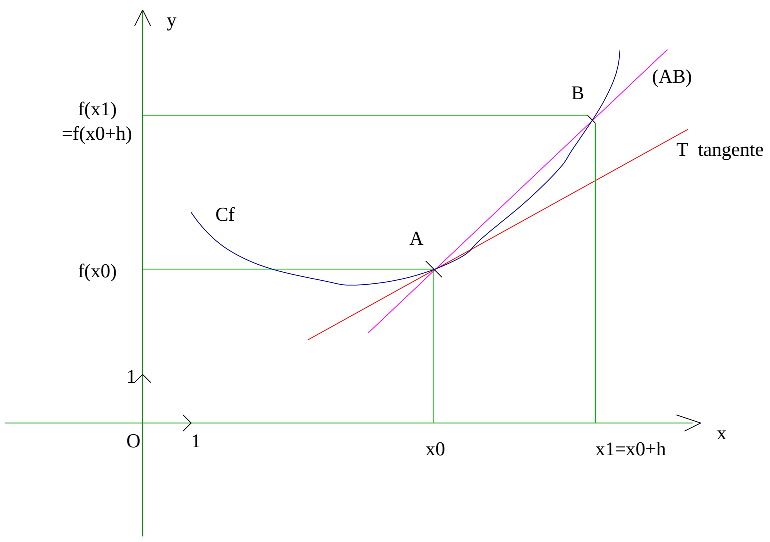
1.3 Fonction dérivée

On suppose que la fonction f est définie sur E_f, que I est un intervalle réel contenu dans E_f et que x_0 est élément de I : $x_0 \in I \subset E_f$.
On note C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.3.1 Nombre dérivé en un point

Taux d'accroissement

<u>Définition</u> Soient x_0 et x_1 dans I. Le taux d'accroissement de f ou taux de variation de f entre x_0 et x_1, $x_0 \neq x_1$ est par définition $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.
Autre notation : On écrit $x_0 + h$ au lieu de x_1.
Le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ est $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.
En effet $x_1 - x_0 = x_0 + h - x_0 = h$.
<u>Interprétation graphique du taux de variation</u> C'est le coefficient directeur de la droite AB passant par les points $A(x_0; y_0 = f(x_0)$ et $B(x_1; y_1 = f(x_1)$.



Nombre dérivé $f'(x_0)$

Définition Le nombre dérivé $f'(x_0)$ de la fonction f au point $x_0 \in I$ est la limite suivante, lorsqu'elle existe :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

C'est encore $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
Interprétation graphique du nombre dérivé Si $f'(x_0)$ existe, c'est le coefficient directeur de la tangente en $A(x_0; f(x_0))$ à la courbe C_f.

1.3.2 Dérivée sur un intervalle

Définition Si en tout point x de l'intervalle I, la fonction f admet un nombre dérivé $f'(x)$, la fonction $f' : \ x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f sur l'intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I.

1.3.3 Exemples

1. La fonction $f : \ x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $[0; +\infty[$; f n'admet pas de nombre dérivé en 0 mais est dérivable sur $]0; +\infty[$.
En effet le taux de variation de 0 à h est $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ et n'a pas de limite finie lorsque h, $(h > 0)$, tend vers 0.
2. La fonction f définie par $f(0) = 0$ et par $f(x) = x^2 \ln x$ lorsque $x > 0$ admet pour nombre dérivé $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \ln h}{h} = \lim_{h \to 0} h \ln h = 0$.
Cette valeur n'est pas accessible en utilisant les formules de dérivation des fonctions usuelles, en effet dériver $(x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$ n'est utilisable que pour $x \neq 0$.

1.4 Propriétés

1.4.1 Formules de dérivation des fonctions usuelles sur un intervalle

Dérivées des puissances, du logarithme, de l'exponentielle ...

1.4.2 Opérations sur les dérivées

Dérivée d'une somme, d'une différence, du produit par une constante, du produit, d'une puissance, de l'inverse, d'un quotient, d'une racine carrée.

1.4.3 Dérivée de la composée de deux fonctions

Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si $g(J) \subset I$, alors $f \circ g$ est dérivable sur J et

$$(f \circ g)'(x) = f' \circ g(x) \times g'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

que l'on note plus simplement en :

$$(f(u))' = f'(u) \times u'$$

où u est mis à la place de $g(x)$ et u' à celle de $g'(x)$.

1.4.4 Dérivées successives

1.4.5 Dérivation et continuité

— Si f est dérivable au point $x_0 \in I$, alors f est continue au point x_0.
— Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est continue sur l'intervalle I.

attention : la réciproque de cette propriété est fausse, une fonction peut être continue sans être dérivable.
exemple : $x \mapsto |x|$ est continue au point 0 mais pas dérivable en 0.
contraposée de la dernière propriété :
Si f n'est pas continue sur I, alors f n'est pas dérivable sur I.

1.4.6 Dérivée et sens de variation

Si f est dérivable sur I et
— si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I,
— si $f'(x) > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I,
— si $f'(x) < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I,
— si $f'(x) \geq 0$ sur I alors f est croissante sur I,
— si $f'(x) \leq 0$ sur I alors f est décroissante sur I,

On peut ajouter :
— si $f'(x) > 0$ sur I, sauf en un **nombre fini** de points (où $f'(x) = 0$), alors f est strictement croissante sur I, etc.

exemple : $f : \quad x \mapsto x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$ qui est strictement positive, sauf au point 0 où $f'(0) = 0$, la fonction f est strictement croissante sur R.

1.5 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1.6 Définition

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I \subset R$, toute fonction F, définie et dérivable sur I, dont la dérivée est $F' = f$ est une primitive sur I de la fonction f.
exemple : La dérivée sur $I =]0; +\infty[$ de $F(x) = x \ln x - x$ est $f(x) = \ln x$, donc F est une primitive sur I de f.

1.7 Propriétés

1.7.1 Primitives de fonctions continues

Toute fonction f définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

1.7.2 Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, l'ensemble des primitives sur I de f est l'ensemble des fonctions $F + c$ où c est une constante.
exemple : $F(x) = x \ln x - x + c$ donne l'ensemble des primitives de $f(x) = \ln x$ sur $I =]0; +\infty[$.

1.7.3 Primitive particulière

Si G est une primitive de f sur l'intervalle I, alors $F(x) = G(x) - G(x_0) + a$ est la primitive sur I de f telle que $F(x_0) = a$.
Autre manière de le retrouver : $F(x) = G(x) - G(x_0) + F(x_0)$.
exemple : Déterminer sur $I =]0; +\infty[$ la primitive $F(x)$ de $\ln x$ telle que $F(e) = -1$.
$G(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $\ln x$ donc la fonction F demandée est telle que :
$F(x) = G(x) - G(e) + (-1) = x \ln x - x - (e \ln e - e) - 1 = x \ln x - x - e + e - 1 = x \ln x - x - 1.$

1.8 Recherche des primitives

1.8.1 Primitives des fonctions usuelles

1.8.2 Primitives d'une somme, d'une différence, du produit par une constante

Si F, G sont des primitives sur l'intervalle I de f, g, et si λ, c sont des constantes, alors :
$F + G + c$ est l'ensemble des primitives de $f + g$,
$F - G + c$ est l'ensemble des primitives de $f - g$,
$\lambda F + c$ est l'ensemble des primitives de λf,

1.8.3 Primitives à partir des autres formules de dérivation

exemple : Déterminer une primitive sur $I =]0; +\infty[$ de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

On remarque qu'en posant $u = \ln x$ on a $u' = \frac{1}{x}$ et donc que $f(x) = u \times u'$.
Or $2u \times u'$ est la dérivée de u^2 et $u \times u'$ celle de $\frac{1}{2}u^2$ donc $f(x)$ est la dérivée de $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.
Les primitives de $f(x)$ sont les fonctions $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$.

D'une manière plus générale, si F est une primitive de f, alors $F(u) + c$ est une primitive de $f(u) \times u'$.
En effet la fonction composée $F(u) = F \circ u$ a pour dérivée $f(u) \times u'$.

On peut appliquer cette méthode à $u'e^u$, $\frac{-u'}{u^2}$, $\alpha u^{\alpha-1}u'$, etc.
Tableau des primitives des fonctions usuelles.

	Intervalle I	Autres conditions	$f(x)$	Primitive $F(x)$
1	R		0	c
2	R	λ constant	λ	$\lambda x + c$
3	R		x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
4	R	n entier , $n > 0$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
5	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	n entier, $n \geq 2$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
6	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$	n entier, $n \leq -2$	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
7	$]0;\ +\infty[$	α réel, $\alpha \neq -1$	x^α	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$
8	$]0;\ +\infty[$		$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
9	$]0;\ +\infty[$		$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
10	$]-\infty; 0[$		$\frac{1}{x}$	$\ln(-x) + c$
11	$]0;\ +\infty[$		$\ln x$	$x \ln x - x + c$
12	R		e^x	$e^x + c$

(c est une constante).

Tableau des primitives qui sont des fonctions composées.
En notant $u = u(x)$ et $u' = u'(x)$, sur tout intervalle où $u(x)$ et $f(x) = g \circ u(x) = g(u(x))$ sont définies et continues, on peut utiliser les primitives suivantes :

	Conditions	$f = g \circ u = g(u)$	Primitive F
1		uu'	$\frac{1}{2}u^2 + c$
2	n entier , $n > 0$	$u^n u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
3	n entier, $n \geq 2$ et $u(x) \neq 0$	$\frac{u'}{u^n} = u^{-n}u'$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
4	n entier, $n \leq -2$ et $u(x) \neq 0$	$u^n u'$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
5	α réel, $\alpha \neq -1$ et $u(x) > 0$	$u^\alpha u'$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1} + c$
6	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$
7	$u(x) > 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$
8	$u(x) < 0$	$\frac{u'}{u}$	$\ln(-u) + c$
9	$u(x) > 0$	$u' \ln u$	$u \ln u - u + c$
10		$e^u u'$	$e^u + c$

Tableau des primitives qui sont des sommes, des produits ou des quotients.
À partir des formules de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, et lorsque cela a un sens, on a les propriétés du tableau ci-dessous.
($u = u(x)$, $u' = u'(x)$, $v = v(x)$ et $v' = v'(x)$).
Les autres primitives s'obtiennent en ajoutant une constante c à F.

	Nature de la primitive	f	Primitive F
1	Somme	$u' + v'$	$u + v$
2	Différence	$u' - v'$	$u - v$
3	Produit	$u'v + uv'$	uv
4	Inverse	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$
5	Quotient	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$

Chapitre 2

Fonctions Logarithme Népérien et Exponentielle Népérienne.

2.1 Logarithme Népérien

2.1.1 Définition du logarithme népérien

définition.

La fonction Logaritme népérien $x \mapsto \ln(x)$ est la primitive, définie sur $]0;+\infty[$ et s'annulant au point 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. C'est donc la fonction définie par :

$$x \in]0;+\infty[; \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Premières propriétés.

De la définition de la fonction $\ln x$ on déduit immédiatement :
La dérivée de $\ln(x)$ est $\frac{1}{x}$. La fonction $\ln(x)$ est strictement croissante, en effet sa dérivée est strictement positive sur $R_+^\star =]0;+\infty[$.
Le logarithme népérien de 1 est nul : $\ln 1 = 0$.
Si u est une fonction dérivable et strictement positive de la variable x on peut écrire $\ln(u(x)) = \ln \circ u(x)$ et la dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
exemple : $(\ln x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$ mais on a aussi $(2\ln x)' = 2\frac{1}{x}$.

2.1.2 Propriétés algébriques du Logarithme Népérien

On suppose dans ce qui suit que $a,\ b,\ \ldots$ sont des réels strictement positifs.

Logarithme népérien d'un produit, d'un quotient.

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln \frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$.
Cas particulier : $\ln \frac{1}{b} = -\ln(b)$.

Logarithme népérien d'une puissance.

$n \in Z \quad \ln(a^n) = n\ln(a)$.

Logarithme népérien d'une racine carrée.

$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Remarque.

On a vu plus haut que $(\ln x^2)'$ et $(2\ln x)'$ sont égales, cela signifie que $\ln x^2 = 2\ln x + c$, mais en remplaçant x par 1 on peut voir que $0 = c$. C'est donc à partir de la définition que l'on montre $\ln x^2 = 2\ln x$ et aussi les propriétés algébriques énumérées ci-dessus.
On peut, par exemple dériver $\ln(ax)$ pour voir que $\ln(ax) = \ln x + c$ (où c est une constante) puis remplacer x par 1 pour trouver $c = \ln a$ et conclure que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.

Exemple.

$\ln \frac{18a^4\sqrt{3b}}{32c} = \ln(18a^4\sqrt{3b}) - \ln(32c) = \ln(18a^4) + \ln(\sqrt{3b}) - \ln 32 - \ln c$
$= \ln 18 + \ln a^4 + \ln\sqrt{3b} - \ln 2^5 - \ln c = 2\ln 3 + \ln 2 + 4\ln a + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln b - 5\ln 2 - \ln c$
$= \frac{5}{2}\ln 3 - 4\ln 2 + 4\ln a + \frac{1}{2}\ln b - \ln c.$

2.1.3 Étude de la fonction logarithme népérien et représentation graphique

On étudie $x \mapsto \ln x$ sur $R_+^\star =]0; +\infty[$.

Limites.

a) On admettra que $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et aussi que
b) $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
c) On a aussi pour tout entier $n \geq 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.
Remarque : en posant $t = \frac{1}{x}$. comme $\ln t = -\ln x$, si x tend vers $+\infty$, alors t tend vers 0 et $\lim_{t\to 0} \ln t = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\ln x = -\infty$.
de même, $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n}\ln\frac{1}{t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-\ln t}{t^n} = 0$. D'où :
d) $\lim_{x\to 0} x^n \ln x = 0$ et en particulier $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Dérivée.

On a vu que la dérivée est strictement positive.

Tableau de variations ;

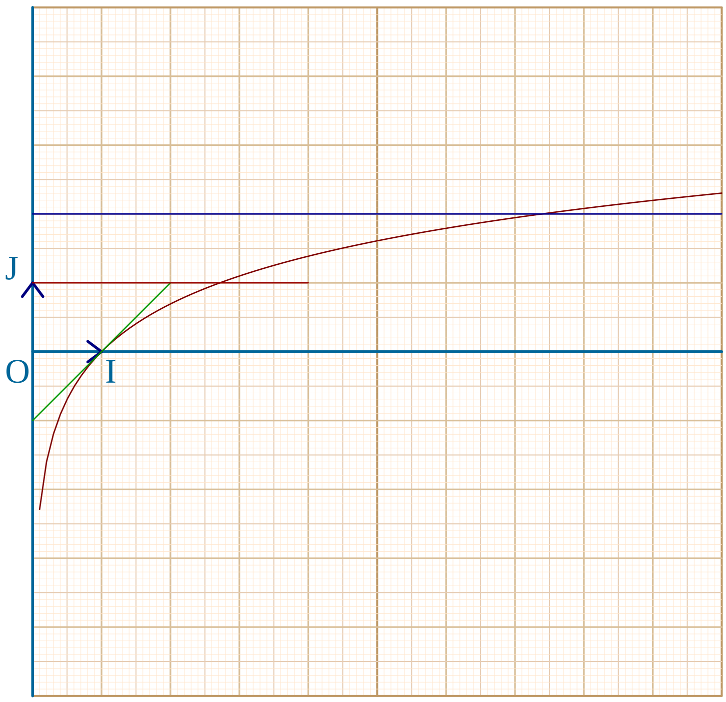
x	0			$+\infty$
$ln'x = \frac{1}{x}$	$\|$		$+$	
$\ln x$	$\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Une bijection.

De :
— $\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
— $\ln x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$,
— $\ln x$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
On déduit que la fonction logarithme népérien est une **bijection** de $]0; +\infty[$ sur $R =]-\infty; +\infty[$.
C'est-à-dire que :
— Tout élément x de $]0; +\infty[$ a une image (et une seule) dans $R =]-\infty; +\infty[$,
— Tout élément y de $R =]-\infty; +\infty[$ a un antécédent et un seul x dans $]0; +\infty[$. ($\ln x = y$).

En particulier le nombre 1 a un antécédent unique que l'on appelle e : $\ln x = 1$ équivaut à $x = e$.
On a $e \approx 2,71828$.
Pour tout $n \in Z$, c'est à dire pour n entier positif ou négatif : $\ln e^n = n$, l'antécédent de n est e^n.
On dit encore que la fonction logaritme népérien est le **logarithme de base e**.

Représentation graphique



2.1.4 Autres Propriétés

Équations

L'équation $\ln x = a$ admet une solution et une seule dans $]0;+\infty[$. ($\ln$ est une bijection). On verra plus en détail ceci au chapitre de l'exponentielle népérienne.

Inéquations

L'inéquation $\ln x < a$, où a est un nombre réel donné, admet pour ensemble de solutions $]0,\alpha[$ où $\ln\alpha = a$, en effet $\ln$ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

Primitive de $\frac{u'}{u}$

La dérivée de $\ln u$ est $\frac{u'}{u}$ donc les primitives de $\frac{u'}{u}$ sont de la forme $\ln u + c$ où c est une constante réelle.
exemple : $\int_2^x \frac{2t+1}{t^2+t+3}dt = [\ln(t^2+t+3)]_2^x = \ln(x^2+x+3) - \ln(4+2+3) = \ln(x^2+x+3) - \ln(9) = \ln\frac{x^2+x+3}{9}$.

2.2 Exponentielle népérienne

2.2.1 Définition et premières propriétés

On a vu que la fonction logarithme népérien est définie sur R_+^*, est dérivable, strictement croissante, a pour limites $\lim_{x\to 0}\ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, on peut donc donner la définition suivante.

Définition

$\boxed{x \xrightarrow{\exp} y \text{ équivaut à } x \xleftarrow{\ln} y}$

La fonction **exponentielle népérienne**, parfois notée $x \mapsto \exp(x)$, est la fonction définie sur R, qui à tout réel x fait

correspondre le réel strictement positif, unique, $y = \exp(x)$ tel que $x = \ln y$.
En le disant autrement : $\exp(a)$ est la solution unique de l'équation, d'inconnue t, $\ln(t) = a$.

Exemples

$\boxed{\exp(0) = 1}$ car $0 = \ln 1$, $\boxed{\exp(1) = e}$ car $1 = \ln e$, $\exp(2) = e^2$ car $2 = \ln(e^2)$.

Premiéres propriétés

— Pour tout $n \in Z$, $\exp(n) = e^n$ car $\ln e^n = n \ln e = n$.
— La fonction exponentielle népérienne est la **fonction réciproque** de la fonction logarithme népérien, (et inversement : la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle népérienne).
La fonction exponentielle népérienne est une bijecrion de R vers R_+^*.
— Quel que soit le réel x, $\boxed{\exp(x) > 0.}$

Notation exponentielle

On a vu que pour tout entier $n \in Z$ on avait $e^n = \exp(n)$, on décide de donner un sens à la notation e^a où a est cette fois un réel quelconque en disant que : $e^a = exp(a)$.
Par exemple : on savait calculer $e^3 = e \times e \times e$, l'exposant 3 correspond au nombre de facteurs du produit, mais ce mode de calcul ne convient pas à $e^{0,15}$ pour lequel on calculera $e^{0,15} = \exp(0, 15)$.

2.2.2 Propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne

Ces propriétés correspondent à celles de la fonction logarithme népérien.

Tableau des propriétés

En écrivant $x = \ln a$ et $y = \ln b$ ou, ce qui revient au même, $a = e^x$ et $b = e^y$, on passe aisément des propriétés du logarithme à celles de l'exponentielle.
Les réels a et b sont strictement positifs.

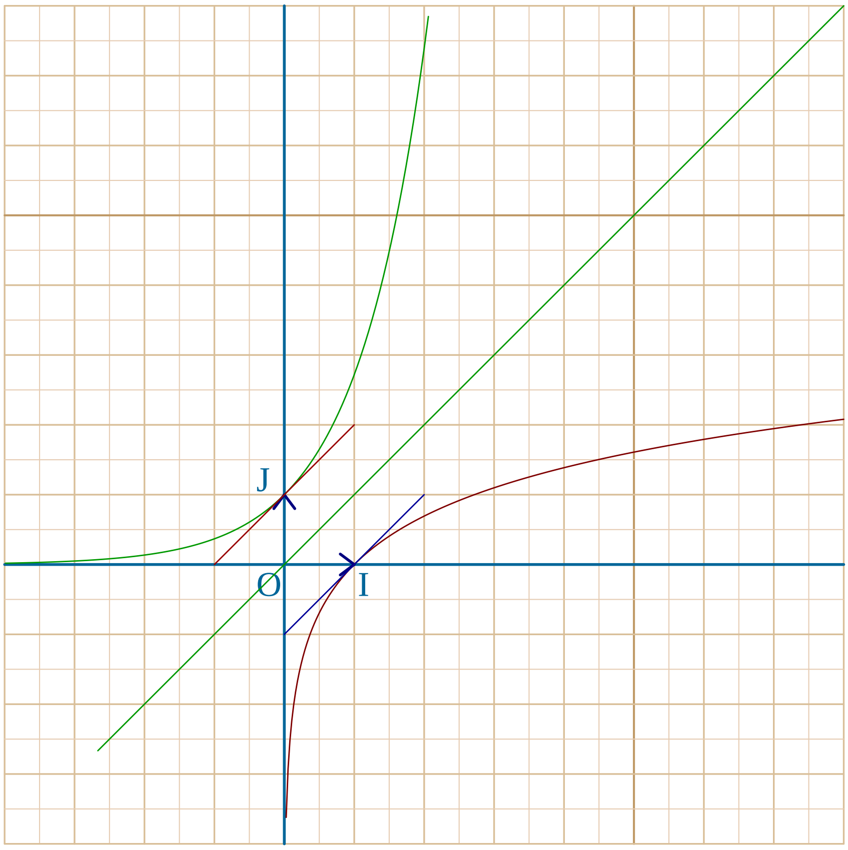
	Exponentielle	Logarithme	
somme	$e^{x+y} = e^x \times e^y$	$\ln a + \ln b = \ln(a \times b)$	produit
opposé	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	$-\ln a = \ln \frac{1}{a}$	inverse
différence	$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$	quotient
produit par une constante k	$e^{kx} = (e^x)^k$	$K \ln a = \ln a^K$	puissance
exposant moitié	$e^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{e^x}$	$\frac{1}{2} \ln a = \ln \sqrt{a}$	racine carrée

Relations fonctionnelles

— Exponentielle : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ qui correspond à $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$ est appelée une relation fonctionnelle.
c'est de cette relation que peuvent se déduire les autres propriétés du tableau.

— Logarithme : $\boxed{\ln a + \ln b = \ln(ab)}$ est aussi une relation fonctionnelle.

2.2.3 Étude des variations de l'exponentielle népérienne



Limites

	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$n \in Z$	$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Comme $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$, l'axe (Ox) d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction exponentielle.

Dérivée

En admettant que la fonction exponentielle est dérivable sur R. De $\ln e^x = x$, en dérivant l'un et l'autre des deux membres on obtient :
$(\ln e^x)' = \frac{(e^x)'}{e^x}$
et $(x)' = 1$ donc $\frac{(e^x)'}{e^x} = 1$ d'où $\boxed{(e^x)' = e^x.}$
On en déduit pour toute fonction dérivable $u : x \mapsto u(x)$ la propriété $\boxed{(e^u)' = u'e^u.}$

Variations

La fonction exponentielle e^x est strictement positive, sa dérivée e^x aussi, la fonction exponentielle est donc strictement croissante sur R.

x	$-\infty$		$+\infty$
dérivée e^x		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative

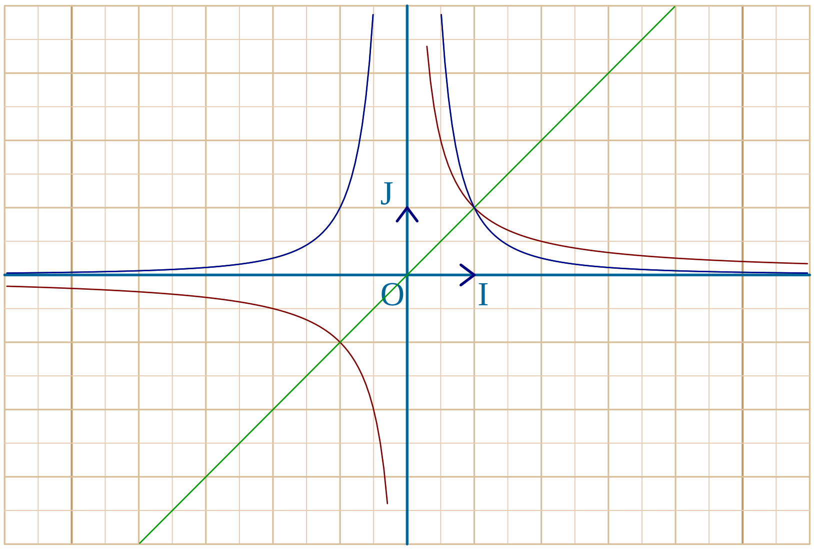
Dans un repère orthonormal les deux courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2.3 Autres fonctions Puissances

2.3.1 Puissances d'exposant entier

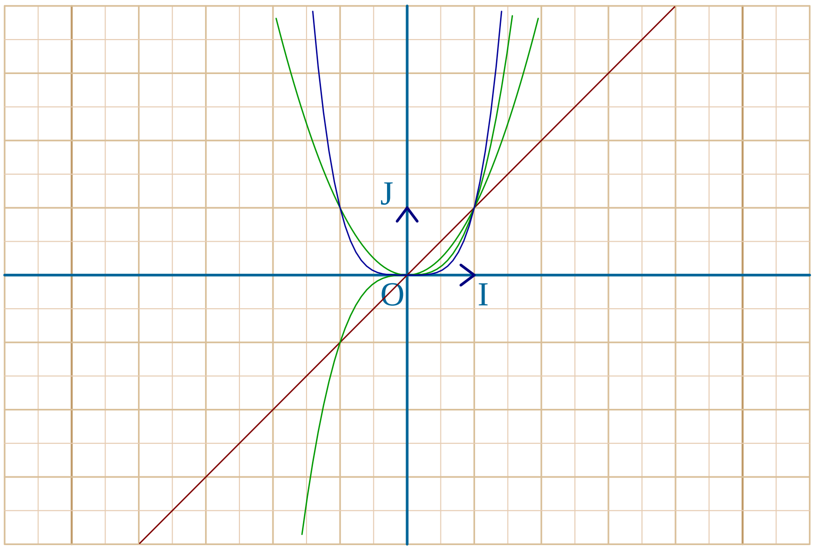
2.3.2 Exposant négatif

fonctions $x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \to x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, par exemple.



2.3.3 Exposant supérieur ou égal à 1

Ces fonctions sont définies sur R tout entier, ce sont, par exemple :
$x \to x$, $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to x^4$ etc.



2.3.4 Puissances d'exposant réel

Définition

Pour tout réel strictement positif a, $a > 0$, et tout réel b quelconque, on définit a^b par $\boxed{a^b = e^{b\ln a}}$.

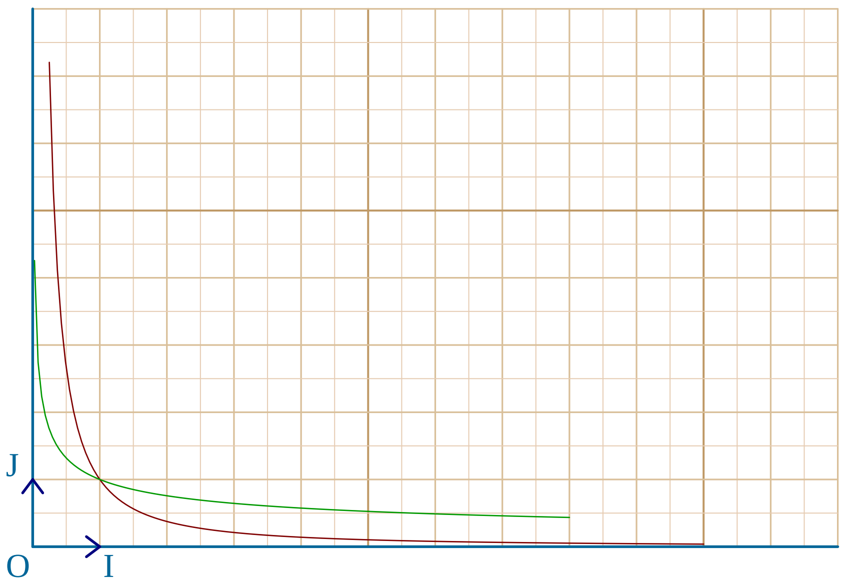
Remarques

En prenant le logarithme du second membre on obtient $\ln(e^{b\ln a}) = b\ln a$ ce qui permet d'étendre la formule $n\ln a = \ln a^n$ au cas où l'entier n est remplacé par un réel quelconque b. Le premier membre donne $\boxed{\ln(a^b) = b\ln a.}$
Il faut bien faire attention que si l'exposant n'est pas entier, a^b n'est définie que pour $a > 0$, ainsi on peut écrire par exemple $2^{\sqrt{2}}$.
Dans l'écriture a^b, a est la base, b est l'exposant. $x \longrightarrow a^x$ est la fonction exponentielle de base a, $a > 0$.
cas particulier : Pour $a = 1$ et b quelconque, $1^b = 1$; En effet $\ln 1^b = b\ln 1 = b \times 0 = 0 = \ln 1$.

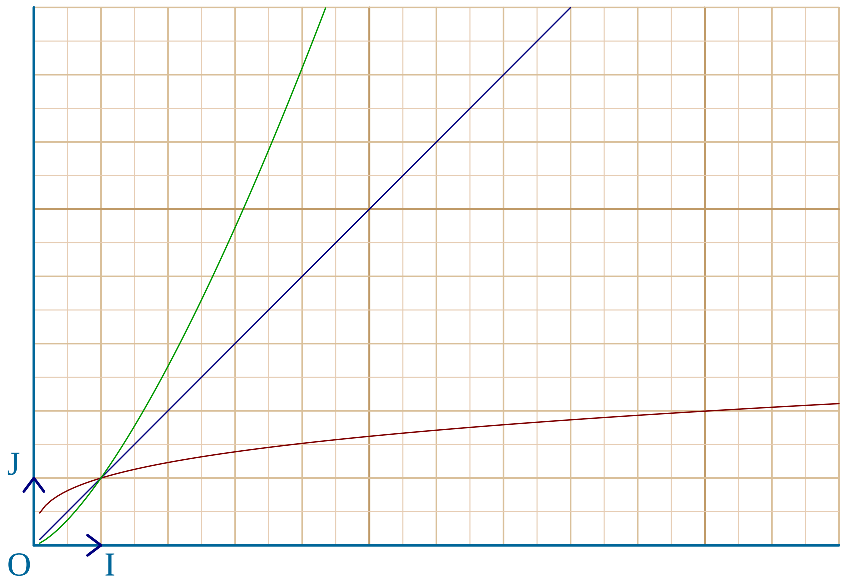
2.3.5 Étude de fonctions x^α

Dérivée

La fonction $f: \ x \mapsto f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$ où α est un réel constant donné, est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$.
$f'(x) = (\alpha\ln x)' \times e^{x\ln\alpha} = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, formule qui correspond, dans le cas où l'exposant est entier à $f(x) = x^n, \quad f'(x) = nx^{n-1}$.
Le signe de la dérivée est donc celui de α.
Si $\alpha < 0$ la fonction $f: \ x \mapsto f(x) = x^\alpha$ est strictement décroissante.
Si $\alpha > 0$ la fonction $f: \ x \mapsto f(x) = x^\alpha$ est strictement croissante.
Les limites s'obtiennent à partir de celles de la fonction e^x. On peut aussi distinguer les cas $0 < \alpha < 1$ et $1 < \alpha$, les courbes ont des allures différentes.



cas $\alpha = -\sqrt{2}$ et $\alpha = -0.4$.



cas $\alpha = 0.3$, $\alpha = 1$ et $\alpha = \sqrt{2}$.

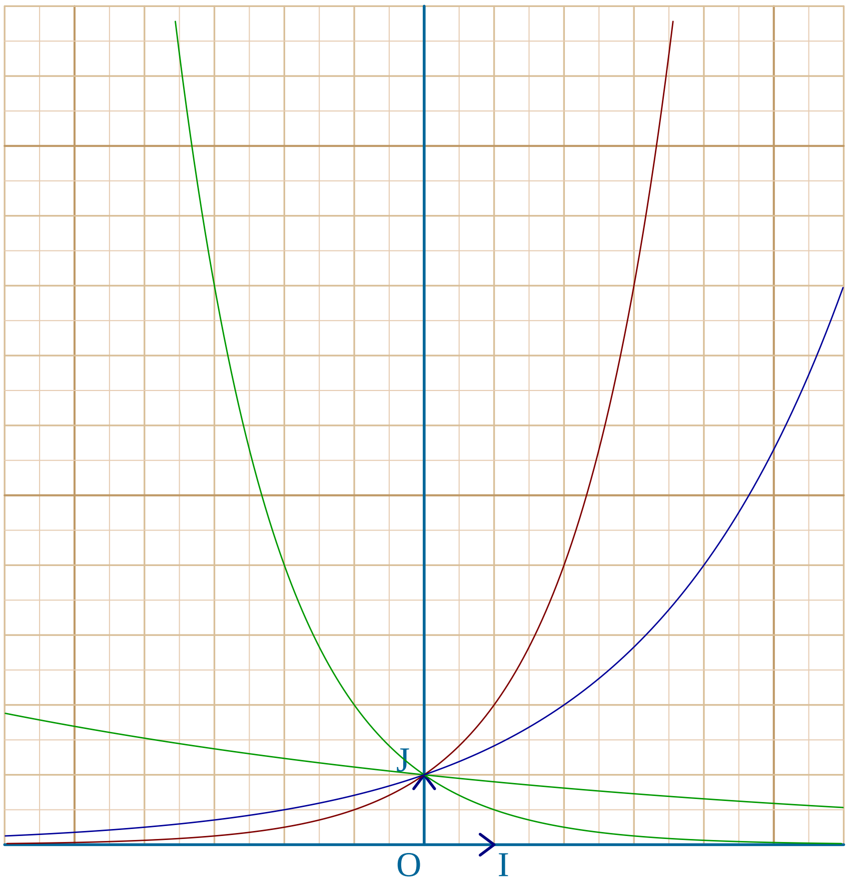
2.4 Exponentielle de base a

2.4.1 Dérivée et Variations

La fonction $a > 0, \quad x \mapsto f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est définie sur R et dérivable sur R, sa dérivée est $f'(x) = (\ln a) \times e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$, dont le signe est celui de $\ln a$, on distingue donc les trois cas :
$0 < a < 1$, la dérivée est strictement négative et $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante.
$a = 1$, ce cas a peu d'intérêt, la fonction est constante égale à 1 : $x \mapsto 1$.
$a > 1$, la dérivée est strictement positive et $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.

Les limites s'obtiennent aisément à partir de celles de la fonction $x \mapsto e^x$.

2.4.2 Courbes représentatives



Les valeurs de α sont $0,5 \quad 0,9 \quad \sqrt{2}$ et 2.

2.5 Exponentielle et Logarithme de base a, $a > 0$ et $a \neq 1$

2.5.1 Fonctions réciproques $x \mapsto a^x$ et $t \mapsto \log_a t$

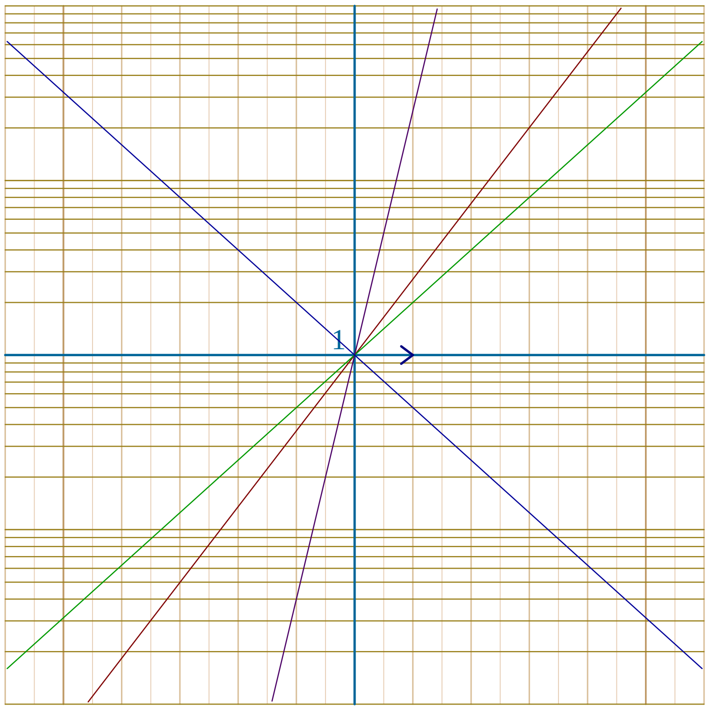
La fonction $a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \mapsto f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ est définie, dérivable (donc continue) et stictement monotone sur R, ses limites aux bornes de R sont 0 et $+\infty$ (dans cet ordre ou non) ; et est donc une bijection de R sur $]0; +\infty$, sa bijextion réciproque est la fonction logarithme de base a, ($a > 0$ et $a \neq 1$), qui peut se noter $\log_a$, si $a = 10$, $\imath og_{10}$ est le logarithme décimal, encore noté $\log$.
$t = e^{x \ln a} = a^x$ équivaut à $\frac{\ln t}{\ln a} = x$ d'où $\log_a t = \frac{\ln t}{\ln a}$ et en particulier $\log_{10} t = \log t = \frac{\ln t}{\ln 10}$.

2.5.2 Propriétés du logarithme décimal

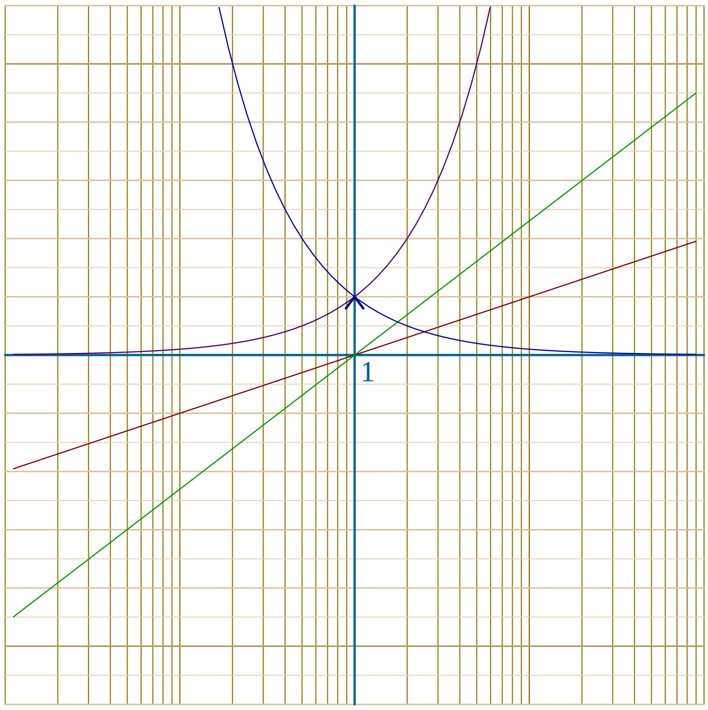
La fonction logarithme décimal est définie et dérivable sur $]0; +\infty$.
Comme $10 > 1$, les fonctions $x \mapsto 10^x$ et $t \mapsto \log t = \frac{\ln t}{\ln 10}$ sont strictement croissantes. La dérivée de la fonction logarithme décimal est $(\log x)' = (\frac{\ln x}{\ln 10})' = \frac{1}{x \ln 10} > 0$.
Les propriétés algébriques sont :
$\log 1 = 0$, $\log 10 = 1$, $\alpha \in R$, $log 10^\alpha = \alpha$, en particulier $n \in Z$, $\log 10^n = n$, ce qui donne par exemple $\log 1\,000 = 3$ ou encore $\log 0,000\,1 = -4$.
On a aussi $a > 0,\ b > 0,\ \log ab = \log a - \log b$ etc.

2.5.3 Papier logarithmique

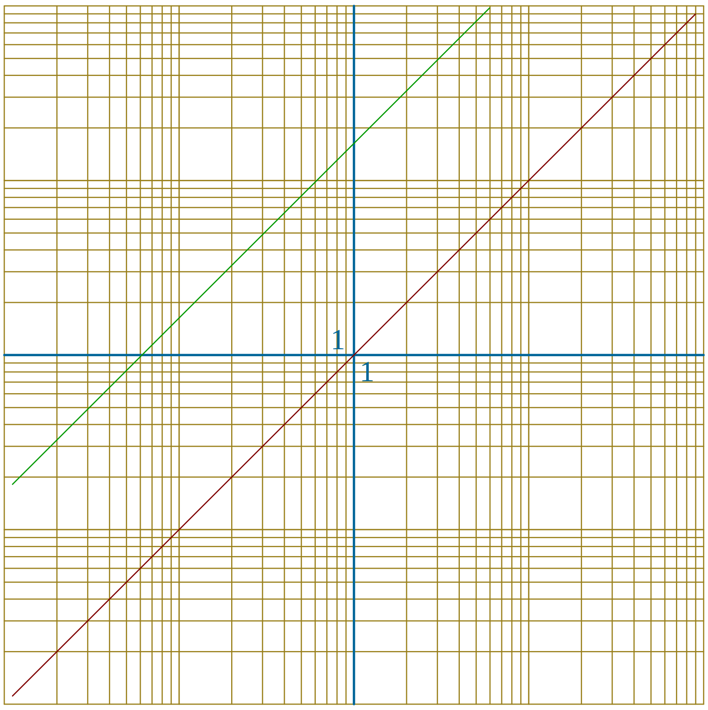
Sur la figure ci-dessous sont représentées les fonctions $x \mapsto e^x$,$x \mapsto 2^x$,$x \mapsto 25^x$,$x \mapsto 0,5^x$.
Le premier axe est régulièrement gradué (1 unité = 1 cm), le second est gradué différemment les graduations principales sont 1 10 100 ...vers le haut et 1 0,1 0,01 ...vers le bas.



Sur la seconde figure les fonctions sont $x \mapsto \log x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.



Sur la troisième figure, les fonctions sont $x \mapsto x$, $x \mapsto (3e^{\ln(2x+1)})$.



1
1

Chapitre 3

Calcul Intégral

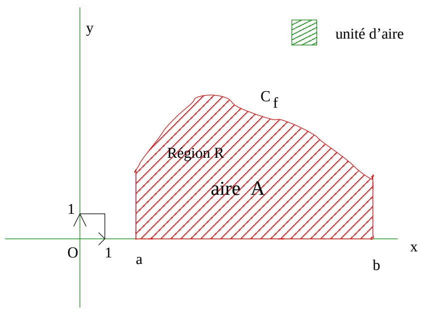
3.1 Intégrale d'une fonction continue ou continue par morceaux

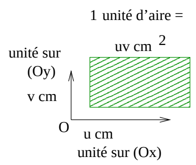
3.1.1 Intégrale d'une fonction continue sur un segment réel

Intégrale et Aire

Soit la fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [a; b]$.
On sait la fonction continue f admet des primitives sur l'intervalle I.
Supposons de plus que f est positive sur l'intervalle I, c'est-à-dire que pout tout x, $x \in I$, $f(x) \geq 0$.
Appelons C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. La région plane R délimitée par la courbe C_f, l'axe (Ox) et les deux parallèles à (Oy) d'équations $x = a$ et $x = b$ correspond à l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} a & \leq & x & \leq & b \\ 0 & \leq & y & \leq & f(x) \end{cases}$$

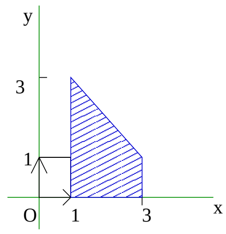




On remarquera que $a \leq b$.
Soit F une primitive, sur le segment I, de la fonction continue f. L'aire A de la région R, en unités graphiques, est $F(b) - F(a)$.
Cette aire A sera notée

$$\int_a^b f(t)dt = A = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

unité graphique : Cette A aire est donnée en unités graphiques. 1 unité graphique d'aire est, dans un repère orthogonal, l'aire du rectangle de côtés 1 sur les axes.
Si les unités sur les axes sont : u cm sur (Ox) et v cm sur (Oy), alors 1 unité graphique correspond à uv cm^2.
L'aire en cm^2 est alors $A' = A \times u \times v$ cm^2.
La fonction $f : x \mapsto f(x) = -x + 4$ est positive sur $]-\infty; 4]$ et donc aussi sur l'intervalle $[1; 3]$.
$\int_1^3(-t+4)dt = [-\frac{t^2}{2} + 4t]_1^3 = -\frac{9}{2} + 12 - (-\frac{1}{2} + 4) = 4$ est l'aire d'un trapèze dont les deux bases verticales ont pour



longueurs $f(1) = 3$ et $f(3) = 1$ et dont la hauteur est $3 - 1 = 2$. L'aire est donc $\frac{(3+1)\times 2}{2} = 4$.

Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et soit F une primitive de f sur l'intervalle I.
Pour tous réels a et b de l'intervalle I, on appelle « intégrale de a à b de f » la différence $F(b) - F(a)$ et on l'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

a et b sont appelées les bornes de l'intégrale.
Intégrer la fonction f entre a et b c'est calculer cette intégrale.
On peut remarquer que si $G(x) = F(x) + c$ est une autre primitive, quelconque, de $f(x)$, alors $G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ et donc que l'on peut utiliser n'importe laquelle des primitives de f sur I pour définir l'intégrale.
$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$ Soit $f(x) = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$ où f est définie et continue sur R.
Une primitive sur R de f est F : $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$
$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (t^2 - 2t)dt = \frac{b^3}{3} - b^2 - (\frac{a^3}{3} - a^2) = \frac{b^3}{3} - b^2 - \frac{a^3}{3} + a^2$.
$\int_0^1 (t^2 - 2t)dt = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$.
$\int_{-2}^2 (t^2 - 2t)dt = \frac{8}{3} - 4 - (\frac{-8}{3} - 4) = \frac{16}{3}$.
$\int_3^{-1} (t^2 - 2t)dt = \frac{-1}{3} - 1 - (\frac{8}{3} - 4) = 0$.
$\int_0^z (t^2 - 2t)dt = \frac{z^3}{3} - z^2$.
On peut remarquer que les deux bornes a et b de l'intégrale peuvent être choisies quelconques dans l'intervalle I, on peut avoir aussi bien $a < b$ que $a > b$ ou $a = b$. Évidemment la valeur de l'intégrale dépend de ce choix. Les bornes a et b peuvent être des constantes ou des variables, (comme z dans l'un des exemples). Si l'une des bornes est une variable, l'intégrale est une fonction de cette variable :
$\int_0^z (t^2 - 2t)dt = \frac{z^3}{3} - z^2$ définit une fonction de la variable réelle z.

variable muette :
L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ peut s'écrire aussi $\int_a^b f(x)dx$ ou encore $\int_a^b f(X)dX \ldots$La valeur de cette intégrale ne dépend que de f, de a et de b et pas du tout du choix de t, x ou $X \ldots$On dit que la variable t, x ou $X \ldots$est une variable *muette*. Par exemple :
$\int_{-2}^2 (t^2 - 2t)dt = \frac{16}{3}$ est une constante, donc indépendante de la variable t.
$\int_0^z (t^2 - 2t)dt = \frac{z^3}{3} - z^2$ est une expression qui dépend de la variable z mais pas de la variable t.
On obtient les mêmes résultats en changeant de variable muette :
$\int_{-2}^2 (Z^2 - 2Z)dZ = \frac{16}{3}$ et $\int_0^z (w^2 - 2w)dw = \frac{z^3}{3} - z^2$. — L'intégrale $\int_a^a f(t)dt$ est nulle, en effet $\int_a^a f(t)dt = F(a) - F(a) = 0$.
Si les bornes sont égales, l'intégrale est nulle.
— L'intégrale $\int_a^b 0dt$ est nulle, en effet une primitive de la fonction nulle est une constante, prenons par exemple $F(x) = 0$ et l'intégrale est donc 0-0=0.
L'intégrale d'une fonction nulle est nulle.
— Les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^a f(t)dt$ sont opposées, en effet la première est $F(b) - F(a)$ et la seconde $F(a) - F(b)$.
Si on échange les bornes, on obtient l'opposée de l'intégrale.
— Les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b (-f(t))dt$ sont opposées, en effet la première est $F(b) - F(a)$ et la seconde $-F(a) - (-F(b)) = -F(a) + F(b) = -(F(a) - F(b)$.
Les intégrales sur $[a; b]$ de deux fonctions oposées sont opposées.

Calculs d'aires

fonction continue positive

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$ et si $[a; b] \subset I$, alors l'aire A, en unités graphiques, de la région définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & \leq & x & \leq & b \\ 0 & \leq & y & \leq & f(x) \end{array} \right.$$

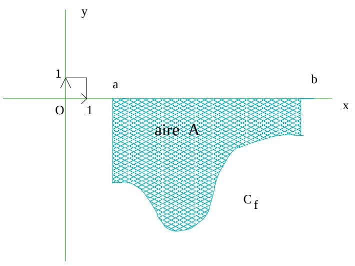
est $A = \int_a^b f(t)dt$.

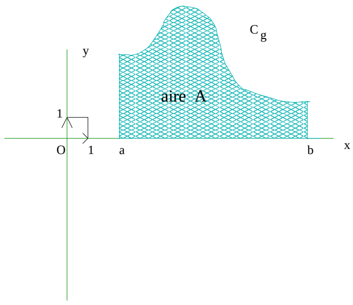
fonction continue négative

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$ et si $[a; b] \subset I$, alors l'aire A, en unités graphiques, de la région définie par

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & \leq & x & \leq & b \\ f(x) & \leq & y & \leq & 0 \end{array} \right.$$

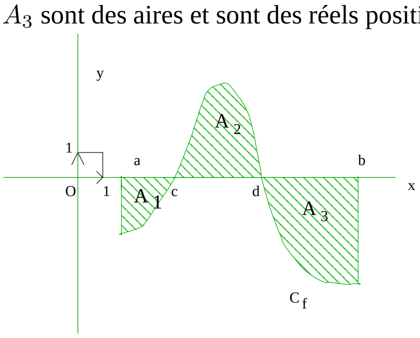
est $A = -\int_a^b f(t)dt$.
Autrement dit, l'intégrale $J = \int_a^b f(t)dt$ est négative et $J = \int_a^b f(t)dt = -A$.
En effet, si g est la fonction définie sur l'intervalle I par $g(x) = -f(x)$, les courbes C_g et C_f sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe (Ox) du repère orthogonal $(0; \vec{i}, \vec{j})$ et l'aire A est $A = \int_a^b g(t)dt = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(t)dt$.





fonction continue quelconque

Si la fonction f change de signe sur l'intervalle $I = [a; b]$, on décompose I en plusieurs intervalles sur lesquels f est de signe constant.
exemple :
D'après la figure ci-dessous, l'intégrale $J = \int_a^b f(t)dt$ est égale à $J = \int_a^b f(t)dt = -A_1 + A_2 - A_3$, où A_1, A_2 et A_3 sont des aires et sont des réels positifs.



Inversement, l'aire totale A est $A = A_1 + A_2 + A_3 = -\int_a^c f(t)dt + \int_c^d f(t)dt - \int_d^b f(t)dt$.

3.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

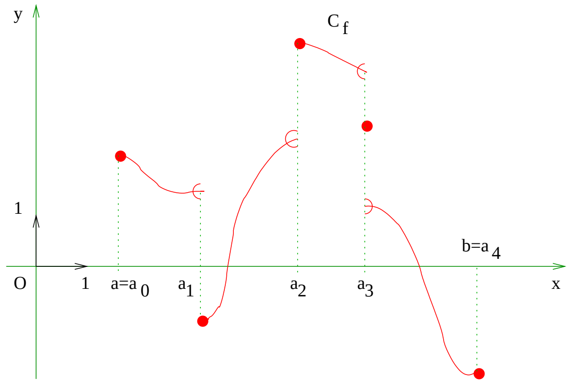
a) Soit la fonction f définie sur l'intervalle I, ouvert ou fermé, de bornes a et b, $a < b$.
S'il existe une subdivision de l'intervalle $[a; b]$, $[a; b] = [a_0; a_1] \cup [a_1; a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}; a_n]$ avec $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ telle que :

— la fonction f est continue sur chacun des intervalles ouverts $]a_0; a_1[$, $]a_1; a_2[$,...,$]a_{n-1}; a_n[$,
— dans chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$, la fonction f admet des limites **finies** aux bornes ($\lim_{x\to a_i^+} f(x)$ existe et est finie ; $\lim_{x\to a_{i+1}^-} f(x)$ existe et est finie),
on dit que la fonction f est continue par morceaux.

Autrement dit : Si f est définie sur un intervalle I et est continue en tout point de I, sauf peut-être en un nombre fini de points de I où les limites à gauche et à droites existent et sont finies, on dit que f est continue par morceaux.

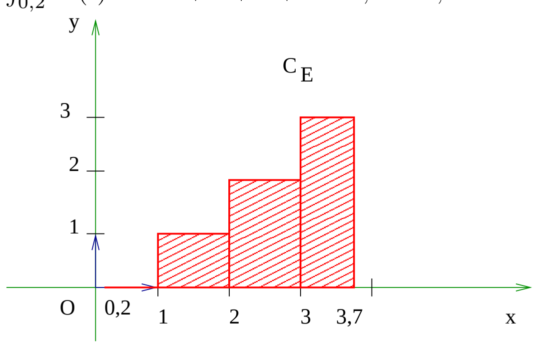
Les fonctions continues sur un intervalle, les fonctions en escalier, les fonctions affines par morceaux sont des fonctions continues par morceaux.

La définition d'une fonction continue par morceaux est illustrée par la figure ci-dessous, l'intervalle $[a; b]$ est découpé en 4 intervalles, $(n = 4)$.



En reprenant les mêmes notations que ci-dessus. Si f est continue par morceaux sur l'intervalle I de bornes a et b, $a < b$, alors, on peut définir l'intégrale $J = \int_a^b f(t)dt$.
J est la somme des intégrales $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)dt$ où les fonctions f_i sont définies et continues sur les intervalles $[a_i; a_{i+1}]$ et égales à f sur $]a_i; a_{i+1}[$.

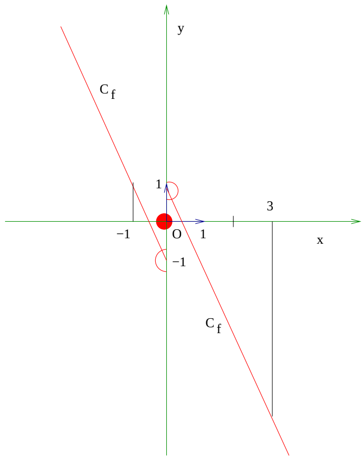
c) Exemple 1 : La fonction en escalier partie entière E. $\int_{0,2}^{3,7} E(t)dt = \int_{0,2}^{1} 0dt + \int_1^2 1dt + \int_2^2 2dt + \int_3^{3,7} dt$.
La fonction E est continue sur chacun des intervalles ouverts $]0,2;\ 1[$, $]1; 2[$, $]2; 3[$, $]3;\ 3,7[$; elle admet une limite finie à droite et à gauche aux bornes de ces intervalles, (par exemple $\lim_{x\to 2^-} E(x) = 1$).
$\int_{0,2}^{3,7} E(t)dt = 0 + 1 + 2 + 3 \times 0,7 = 5,1$.



partie entière E(x) sur [0,2; 3,7]

d)2 La fonction f, affine par morceaux, définie par :

$$\begin{cases} x \in]-\infty; 0[, & f(x) = -2x - 1 \\ x = 0, & f(0) = 0 \\ x \in]0; +\infty[, & f(x) = -2x + 1 \end{cases}$$



Soit $J = \int_{-1}^{3} f(t)dt = \int_{-1}^{0}(-2t-1)dt + \int_{0}^{3}(-2t+1)dt = [-t^2-t]_{-1}^{0} + [-t^2+t]_{0}^{3} = 0 - 6 = -6.$

3.2 Propriétés des Intégrales

3.2.1 Primitives et Intégrales

Propriété. Soit f définie et *continue* sur l'intervalle I et soit $x_0 \in I$ un point quelconque, donné dans I.
La primitive de $f(x)$ s'annulant au point x_0, $x_0 \in I$, est $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.
L'ensemble des primitives de $f(x)$ est $\int_{x_0}^{x} f(t)dt + c$ où c est une constante.
La primitive de $f(x)$ prenant la valeur y_0 au point x_0, $x_0 \in I$, est $\int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0$.

En effet si $x = x_0$, on a $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$ et $\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt + y_0 = y_0$.

exemple : La primitive de $f(x) = \frac{1}{x}$, s'annulant au point e, est $\int_{e}^{x} \frac{1}{t}dt = [\ln t]_e^x = \ln x - \ln e = \ln(x) - 1$.
La primitive $F(x)$ de $f(x) = \frac{1}{x}$, prenant la valeur $F(1) = e$ au point 1 est $F(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}dt + e = [\ln t]_1^x + e = \ln x - 0 + e = \ln(x) + e$.

3.2.2 Linéarité de l'intégrale

a) Intégrale d'une somme de deux fonctions

Propriété. Soient f et g deux fonctions définies et continues, ou définies et continues par morceaux, sur le même intervalle I.
Pour tout réel a, $a \in I$, et tout réel b, $b \in I$, $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
(L'intégrale entre a et b d'une somme de deux fonctions est égale à la somme des intégrales entre a et b de chacune des deux fonctions.)
Dans le cas où f et g sont continues sur I, soient F et G des primitives de f et de g.
On sait que $F + G$ est une primitive de $f + g$ et donc :
$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = [F(t) + G(t)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$.
$\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = [F(t)]_a^b + [G(t)]_a^b = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$. Il y a bien égalité.
On admettra la propriété dans le cas où l'une au moins des fonctions f ou g est continue par morceaux.

exemple : $\int_0^x 5t^2dt + \int_0^x 3z^2dz = \int_0^x 5t^2dt + \int_0^x 3t^2dt = \int_0^x 8t^2dt = \frac{8}{3}x^3$.

b) Intégrale du produit par une constante d'une fonction

Propriété. Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et soit λ une constante réelle.
Pour tout réel a, $a \in I$, et tout réel b, $b \in I$, $\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$.
(L'intégrale entre a et b du produit par une constante d'une fonction est égale au produit par cette constante de l'intégrale entre a et b de la fonction.)
Dans le cas où f est continue sur I, soit F une primitive de f, la démonstration s'obtient en calculant les deux membres de l'égalité qui sont égaux à $\lambda F(b) - \lambda F(a)$.

exemple : Sachant que $\int_0^1 f(t)dt = 0$, calculer $\int_0^1 \frac{3}{4}f(t)dt$.

cas particulier : Si $\lambda = -1$ on retrouve la propriété déjà vue, $\int_a^b -f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

c) Intégrale d'une combinaison linéaire de fonctions

L'ensemble des deux propriétés précédentes se résume en disant que l'intégrale est linéaire.
On peut aussi donner une seule propriété :
Propriété. Soient f et g deux fonctions définies et continues, ou définies et continues par morceaux, sur le même intervalle I, soient λ et μ deux constantes réelles.
Pour tout réel a, $a \in I$, et tout réel b, $b \in I$, $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$.

cas particuliers :
Si $\lambda = 1$ et $\mu = 1$ on retrouve $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.
Si $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ on obtient $\int_a^b (f(t) - g(t))dt = \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$.
(L'intégrale entre a et b d'une différence de deux fonctions est égale à la différence des intégrales entre a et b de chacune des deux fonctions.)

exemple : $\int_0^5 2t - 3e^t dt = \int_0^5 2tdt - 3\int_0^5 e^t dt = \dots$

3.2.3 Relation de Chasles

Propriété. Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I.
Pour tous réels $a \in I$, $b \in I$ et $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$.

Si f est continue sur I et a pour primitive F, on a :
$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$.

cas particulier : $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \int_a^a f(t)dt = 0$ donc $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.

exemple : $\int_{-1}^1 2tdt = \int_{-1}^0 2tdt + \int_0^1 2tdt = -\int_0^{-1} 2tdt + \int_0^1 2tdt = -[t^2]_0^{-1} + [t^2]_0^1 = 0$.

3.2.4 Comparaison des intégrales

a) Intégrale d'une fonction de signe constant

Propriété. Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et soient deux réels a et b de I.
Si $a \leq b$ et si pour tout x, $x \in I$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Si f est continue sur I elle est la dérivée positive de sa primitive F et F est donc croissante, d'où $F(b) - F(a) \geq 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

b) Inégalités entre fonctions et entre intégrales

Propriété. Soient f et g deux fonctions définies et continues (ou continues par morceaux) sur I et soient a et b deux réels éléments de I.
Si $a \leq b$ et si pour tout x, $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, alors, $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

Cette propriété est une conséquence de la précédente. Comme $f(x) \leq g(x)$ on a $g(x) - f(x) \geq 0$ donc $\int_a^b (g(t) - f(t))dt \geq 0$ d'où $\int_a^b g(t)dt \geq \int_a^b f(t)dt$.

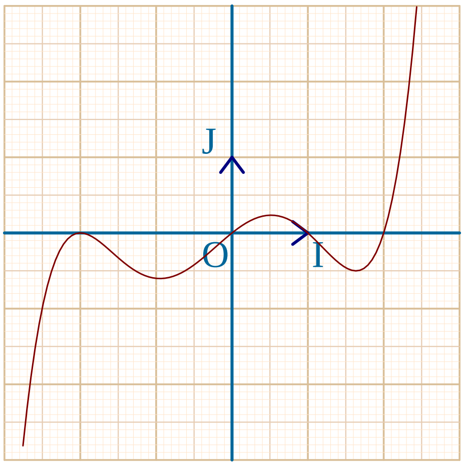
exemple 1 : Si $x \geq 1$ alors $x^2 \geq x$, (pour le montrer, on peut multiplier les deux membres de la première inégalité par x qui est positif), on a donc, pour tout $x \geq 1$, $\int_1^x t^2 dt \geq \int_1^x tdt$, ce qui donne $\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \geq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

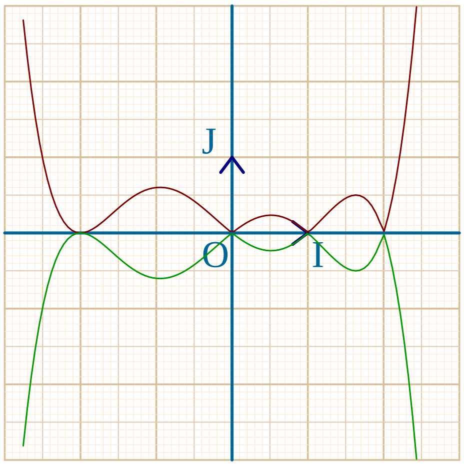
exemple 2 : La propriété ci-dessus permet d'encadrer une intégrale par d'autres intégrales plus aisées à calculer.
Soit par exemple la fonction f telle que pout tout $x \in [0;1]$, $\frac{2}{3x+2} \leq f(x) \leq \frac{2}{3x+1}$.
On a $\int_0^1 \frac{2}{3t+2}dt \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \int_0^1 \frac{2}{3t+1}dt$, ce qui donne $[\frac{2}{3}\ln(3t+2)]_0^1 \leq \int_0^1 f(t)dt \leq [\frac{2}{3}\ln(3t+1)]_0^1$ d'où finalement, après simplification, $\frac{2}{3}\ln\frac{5}{2} \leq \int_0^1 f(t)dt \leq \frac{4}{3}\ln 2$.

c) Valeurs absolues

Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et soient deux réels a et b de I.
Pour tout x, $x \in I$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ et donc, si $a \leq b$, $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$. On en déduit :

$$\text{si } \ a \leq b, \quad 0 \leq \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$



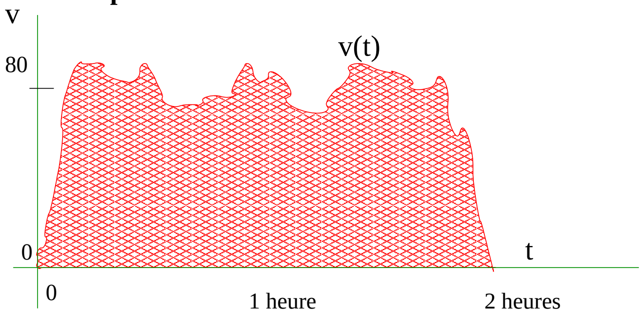


Exemple :

Les fonctions représentées sur les figures ci-dessus sont $f : x \mapsto f(x) = \frac{(x-2)(x-1)x(x+2)^2}{10}$, sa valeur absolue $|f|$ (courbe au-dessus de (Ox), et enfin $-|f|$, (courbe au-dessous de (Ox)).
$f(x) = \frac{1}{10}(x^5 + x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 8x)$ a pour primitive $F(x) = \frac{1}{10}(\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2)$ d'où
$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{10}(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + 4 - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} - 4) = \frac{1}{10}(\frac{2}{5} - \frac{8}{3}) = -\frac{34}{150}$.
$\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| = \frac{34}{150}$.
$\int_{-1}^{1} |f(x)|dx = -\int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = -F(0) + F(-1) + F(1) - F(0) = F(-1) + F(1) =$
$= \frac{1}{10}(\frac{1}{6} - \frac{1}{5} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + 4) + \frac{1}{10}(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + 4) = \frac{1}{10}(\frac{1}{3} - 3 + 8) = \frac{16}{30} = \frac{80}{150}$.
On a bien $\frac{34}{150} \leq \frac{16}{30}$ c'est-à-dire $\left|\int_{-1}^{1} f(x)dx\right| \leq \int_{-1}^{1} |f(x)|dx$.

d) Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Exemple :



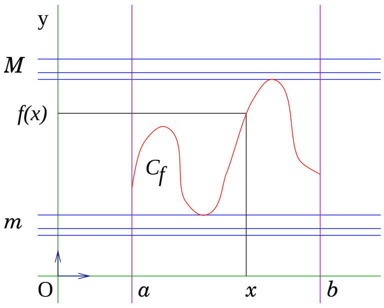
Le schéma ci-dessus représente la vitesse $v(t)$ (en km/h) d'une automobile en fonction du temps t (en heures). Le trajet a duré exactement deux heures et on peut voir que la vitesse était d'environ 80 km/h durant ce trajet.
La distance parcourue est $d = \int_0^2 v(t)dt$ et la vitesse moyenne est $v_m = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 v(t)dt$.

Définition.
Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et soient deux réels a et b de I, $a < b$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.

e) Inégalité de la moyenne

Explication : Sur la figure ci-dessous, la fonction f est telle que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, on a donc

$\int_a^b mdt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b Mdt$ ce qui donne $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$, et enfin, en divisant par $(b-a)$ qui est strictement positif : $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M$.
m est un minorant et M un majorant, sur l'intervalle $[a;b]$, de la fonction f, souvent ce seront les minimum et maximum, sur l'intervalle $[a;b]$, de f.



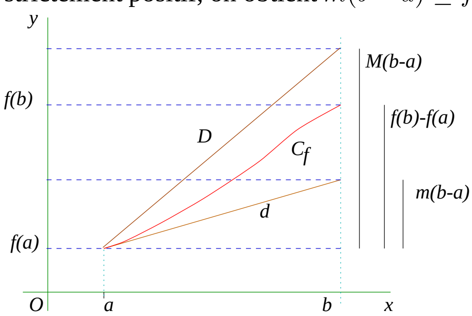
Propriété.
Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et soient deux réels a et b de I, $a < b$.
Si, sur l'intervalle $[a;b]$, m est un minorant et M un majorant de la fonction f, alors,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leq M.$$

Exemple : Si de 13 h à 15 h, la vitesse $v(t)$ de la voiture est restée comprise entre 60 et 90 km/h, alors la vitesse moyenne v_m est comprise entre 60 et 90 km/h.
$60 \leq v(t) \leq 90$ entraîne $60 \leq \frac{1}{15-13}\int_{13}^{15} v(t)dt \leq 90$.

f) Inégalités des accroissements finis

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[a;b]$, $(a < b))$, dont la dérivée f' est continue sur $[a;b]$, et telle qu'il existe deux réels m et M vérifiant $m \leq f'(x) \leq M$.
On a $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)dt \leq M$ d'où $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ car f est une primitive de f'. En multipliant par $b-a$ strictement positif, on obtient $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.



Propriété. Soit la fonction f définie et dérivable sur $[a;b]$ dont la dérivée f' est continue sur $[a;b]$ et soient deux réels m et M.
Si pour tout x, $x \in [a;b]$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$.

On pourrait montrer qu'il existe un élément c, $c \in [a;b]$, tel que $f(b)-f(a) = f'(c)\times(b-a)$.

En oubliant les valeurs précédentes de m et de M, supposons que l'on ait l'inégalité $|f'(x)| \leq M$, ou, ce qui revient au même, $-M \leq f'(x) \leq M$. La propriété des accroissements finis donne : $-M(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$ et donc $|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$. Si a et b sont quelconques dans I on peut généraliser la propriété en écrivant $|f(b)-f(a)| \leq M \times |b-a|$.

Propriété. Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle I, dont la dérivée f' est continue sur I, soient a et b deux éléments quelconques de I et M un réel positif.
Si pour tout x, $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors, $|f(b)-f(a)| \leq M \times |b-a|$.

Supposons maintenant que f est définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I et que a et b sont deux éléments de I, $a < b$. Soit aussi le réel K.
$|f(x)| \leq K$ équivaut à $-K \leq f(x) \leq K$. Intégrons la première inégalité, on obtient $\int_a^b |f(x)dx \leq K(b-a)$, et donc

$0 \leq \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq K(b-a)$.

Propriété. Soit f définie et continue, ou définie et continue par morceaux, sur l'intervalle I, deux réels a et b de I, $a < b$ et un réel positif K.
Si pour tout x, $x \in I$, $|f(x)| \leq K$, alors, $0 \leq \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \leq K(b-a)$.

3.3 Calcul des Intégrales

3.3.1 Utilisation des primitives

a) Tableau

Voici un rappel, sous forme de tableau, de quelques propriétés des primitives et de leur utilisation dans le calcul des intégrales.

Les fonctions u, v sont dérivables sur l'intervalle I et vérifient les conditions indiquées sur tout l'intervalle I. Les réels a et b sont quelconques dans I
À la ligne 7 du tableau, lorsque la primitive est une puissance :
— si l'exposant α est un entier strictement négatif, une condition supplémentaire est $u \neq 0$,
— si α n'est pas entier, la condition supplémentaire est $u > 0$.

	Conditions	Nature de la primitive	fonction f	une primitive F	intégrale
1			$\lambda u'$	λu	$\int_a^b \lambda u'dt = [\lambda u]_a^b = \lambda[u]_a^b$
2		Somme	$u'+v'$	$u+v$	$\int_a^b (u'+v')dt = [u+v]_a^b = [u]_a^b + [v]_a^b$
3		Différence	$u'-v'$	$u-v$	$\int_a^b (u'-v')dt = [u-v]_a^b = [u]_a^b - [v]_a^b$
4		Produit	$u'v+uv'$	uv	$\int_a^b (u'v+uv')dt = [uv]_a^b$
5	$u \neq 0$	Inverse	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$	$\int_a^b \frac{-u'}{u^2}dt = [\frac{1}{u}]_a^b$
6	$v \neq 0$	Quotient	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	$\int_a^b \frac{u'v-uv'}{v^2}dt = [\frac{u}{v}]_a^b$
7	$\alpha \neq -1$	Puissance	$u^\alpha u'$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\int_a^b u^\alpha u'dt = [\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}]_a^b$
8	$u > 0$	Racine carrée	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$\int_a^b \frac{u'}{2\sqrt{u}}dt = [\sqrt{u}]_a^b$
9	$u > 0$	Logarithme	$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$\int_a^b \frac{u'}{u}dt = [\ln u]_a^b$
10		Exponentielle	$e^u u'$	e^u	$\int_a^b e^u u'dt = [e^u]_a^b$
11		Composée	$g' \circ u \times u'$	$g \circ u$	$\int_a^b g' \circ u \times u'\ dt = [g \circ u]_a^b$

b) Exemples.

$\int_a^b (t^2-3t+4)dt = [\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 4t]_a^b$ $\quad$ $\int_a^b (1e^t + te^t)dt = [te^t]_a^b$
$\int_a^b \frac{-2t+1}{(t^2-t+3)^2}dt = [\frac{1}{t^2-t+3}]_a^b$ $\quad$ $\int_a^b 2(2t+1)^4 dt = [\frac{(2t+1)^5}{5}]_a^b$
$\int_a^b \frac{4t^3}{2\sqrt{t^4+1}}dt = [\sqrt{t^4+1}]_a^b$ $\quad$ $\int_a^b \frac{e^t}{e^t+1}dt = [\ln(e^t+1)]_a^b$
$\int_a^b -2te^{-t^2}dt = [e^{-t^2}]_a^b$

3.3.2 Intégration par parties

À la ligne 4 du tableau figure la propriété $\int_a^b (u'v+uv')dt = [uv]_a^b$, en utilisant la linéarité de l'intégrale on obtient $\int_a^b u'vdt + \int_a^b uv'dt = [uv]_a^b$, et enfin en transposant : $\int_a^b u'vdt = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dt$.

Propriété.
Soient u et v deux fonctions définies, continues et dérivables sur l'intervalle I, dont les dérivées u' et v' sont continues sur I. Soient a et b deux éléments quelconques de I.
On a l'égalité

$$\int_a^b u'vdt = [uv]_a^b - \int_a^b uv'dt.$$

Exemple 1. Déterminer une primitive de $\ln x$ en calculant l'intégrale $A = \int_1^x \ln t dt$.

On peut écrire $A = \int_1^x 1 \ln t dt$ et en comparant $\int_1^x 1 \ln t dt$ à $\int_a^b u' v dt$, on peut poser $u' = 1$, $v = \ln t$ et $u = t$, $v' = \frac{1}{t}$.
$A = \int_1^x \ln t dt = \int_1^x 1 \ln t dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} dt = x \ln x - \int_1^x dt = x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$.
La primitive de $\ln x$ qui s'annule pour $x = 1$ est $x \ln x - x + 1$.

Exemple 2. Calculer $\int_0^x t^2 e^t dt$.

$\int_0^x t^2 e^t dt = [t^2 e^t]_0^x - \int_0^x 2te^t dt = x^2 e^x - ([2te^t]_0^x - \int_0^x 2e^t dt) = x^2 e^x - 2xe^x + [2e^t]_0^x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$.
(En intégrant deux fois par parties après avoir remarqué que $u' = e^t$ est la dérivée de $u = e^t$).

Vérification :
a) Pour $x = 0$, l'expression obtenue est nulle.
b) En dérivant l'expression obtenue.
$(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2)' = 2xe^x + x^2 e^x - (2e^x + 2xe^x) + 2e^x - 0 = 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2 e^x$.

3.3.3 Changement de variable

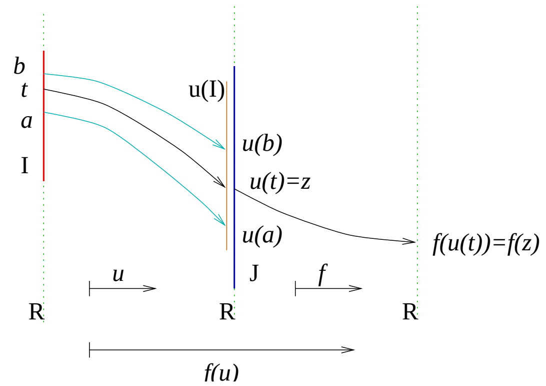
a) Présentation du changement de variables

À la ligne 11 du tableau des propriétés on peut lire $\int_a^b g' \circ u \times u' \, dt = [g \circ u]_a^b$.
Cette propriété peut encore s'écrire $\int_a^b g'(u) \times u' \, dt = [g(u(t))]_a^b = g(u(b)) - g(u(a))$.
Le calcul suivant donne le même résultat : $\int_{u(a)}^{u(b)} g'(z) dz = [g(z)]_{u(a)}^{u(b)} = g(u(b)) - g(u(a))$, on a donc

$$\int_a^b g'(u) \times u' \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g'(z) \, dz.$$

En remplaçant g' par f dans cette égalité et en généralisant, on obtient la propriété, admise, ci-dessous. Cette propriété est vérifiée lorsque f est continue et pas nécessairement dérivable :
Propriété
Soient I et J deux intervalles réels, u une fonction dérivable sur I, telle que $u(I) \subset J$, dont la dérivée u' est continue sur I et deux éléments quelconques a et b de I. Soit f une fonction continue sur J.

$$\int_a^b f(u(t)) \times u'(t) \, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(z) \, dz.$$



Remarques :
— l'expression $f(u(t)) \times u'(t)$ est définie sur I alors que $f(z)$ est définie sur J.
— les écritures $f(u(t))$ et $u'(t)dt$ sont remplacées respectivement par $f(z)$ et dz, les bornes a et b de l'intégrale changent aussi et deviennent respectivement $u(a)$ et $u(b)$.
L'intérêt de la méthode est d'obtenir une intégrale plus simple et plus lisible.

b) Changement de variable de la forme $z = u(t) = t + b$

Exemple.
Soit à calculer $A = \int_2^5 (t+4)^3 dt$. On peut poser $z = u(t) = t + 4$.
$dz = u'(t)dt = dt$, $u(2) = 6$ et $u(5) = 9$ donc $A = \int_2^5 (t+4)^3 \times dt = \int_6^9 z^3 dz = [\frac{z^4}{4}]_6^9$.

c) Changement de variable de la forme $z = u(t) = at, \ a \neq 0$

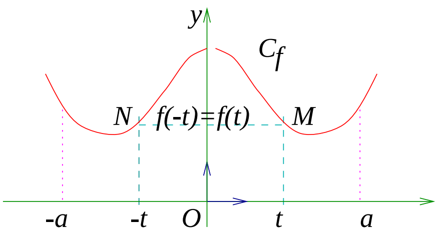
Exemple.
Soit à calculer $B = \int_0^1 3^t dt = \int_0^1 e^{t \ln 3} dt$.
On pose $z = u(t) = t \ln 3$, d'où $dz = \ln 3 \ dt$, $u(0) = 0$ et $u(1) = \ln 3$.
$B = \int_0^1 3^t dt = \int_0^1 e^{t\ln 3} dt = \frac{1}{\ln 3} \int_0^1 e^{t \ln 3} \ln 3 \ dt = \frac{1}{\ln 3} \int_0^{\ln 3} e^z dz = \frac{1}{\ln 3}[e^z]_0^{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}[e^{\ln 3} - e^0] = \frac{2}{\ln 3}$.

e) Changement de variable plus général

Exemple.
Soit à calculer $C = \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt$.
On pose $z = u(t) = \ln t$ et on obtient $dz = \frac{1}{t} dt$, $u(e) = \ln e = 1$ et $u(e^2) = \ln e^2 = 2$.
$C = \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_1^2 \frac{1}{z} dz = [\ln z]_1^2 = \ln 2$.

3.4 Parité et Simplification du Calcul de certaines Intégrales

3.4.1 Intégrales de fonctions paires

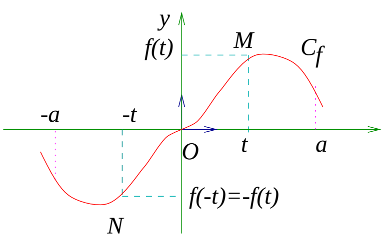


Propriété.
Soit la fonction f définie, continue et paire sur I, un réel quelconque a tel que $a \in I$ et $-a \in I$. On a

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \int_0^a f(t)dt.$$

Exemple.
$\int_{-2}^{2} (3t^2 + 5)dt = 2 \int_0^2 (3t^2 + 5)dt = 2[t^3 + 5t]_0^2 = 2 \times 18 = 36$.

3.4.2 Intégrales de fonctions impaires



Propriété.
Soit la fonction f définie, continue et impaire sur I, un réel quelconque a tel que $a \in I$ et $-a \in I$. On a

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0.$$

Exemple 1.
$\int_{-2}^{2}(t^3-2t)dt=0.$

3.4.3 Décomposition d'une fonction en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Propriété.
somme d'une fonction g paire et d'une fonction h impaire, définies sur E_f telles que :
$g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.
Cette décomposition est unique.

On voit, d'après leur définition, que les deux fonctions sont, l'une paire, l'autre impaire. Pour montrer l'unicité de la décomposition on suppose qu'il existe deux décompositions $f=g+h$ et $f=g_1+h_1$ et on montre que $g_1=g$ et que $h_1=h$.
Calculons $(g_1+h_1)-(g+h)=f-f=0$, ce qui donne $g_1-g=h-h_1$, la foncion g_1-g est paire et aussi impaire, car égale à $h-h_1$, c'est donc la fonction nulle : $g_1-g=0$, ce qui donne bien $g_1=g$ et aussi $h=h_1$.

Exemple 1.
On décompose une fonction polynôme en une somme de deux fonctions, l'une paire, l'autre impaire, en séparant les monômes de degrés pairs et impairs et on calcule la somme des deux intégrales de ces deux fonctions en effectuant les simplifications.
$\int_{-a}^{a}(t^4-2t^3+6t^2-2t-1)dt=\int_{-a}^{a}(t^4+6t^2-1)dt+\int_{-a}^{a}(-2t^3-2t)dt=2\int_{0}^{a}(t^4+6t^2-1)dt=\frac{a^5}{5}+2a^3-a.$

Exemple 2.
$e^x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ où la fonction paire ch : $x\mapsto \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ est appelée « cosinus hyperbolique » et où la fonction impaire sh : $x\mapsto \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ est appelée « sinus hyperbolique ».
$\int_{-a}^{a}e^t dt=2\int_{0}^{a}\mathrm{ch}(t)dt=2\int_{0}^{a}\frac{e^t+e^{-t}}{2}dt$, ce qui ne simplifie pas les calculs.